Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

11. клас

РЕГАЛИЯ 6

Използвани означения:

! обърнете внимание

исторически бележки

алгоритъм при решаване на някои задачи

* ——— незадължителен текст с повишена трудност ——— *

ISBN 978-954-745-322-7

СЪДЪРЖАНИЕ

Тема 3. Тригонометрични функции

Тема 4. Вероятности

Тема. Годишен преговор

ТЕМА 1

СТЕПЕН И ЛОГАРИТЪМ

1 КОРЕН ТРЕТИ. СВОЙСТВА

Понятието корен трети

Задача 1. Обемът на куб е 8 cm^3. Да се намери дължината на ръба на този куб.

Решение:

Означаваме дължината на ръба на куба с a. Тогава от $V = a^3$ получаваме $8 = a^3$. Следователно дължината на ръба на куба е такова число a, което, повдигнато на трета степен, е 8. Записва се $a = \sqrt[3]{8} = 2$ (cm) и се чете „a е равно на корен трети (кубичен корен) от 8".

Определение

Корен трети (кубичен корен) от реалното число a се нарича числото, което, повдигнато на трета степен, е равно на a.

Корен трети от a се означава $\sqrt[3]{a}$, където a **е подкоренна величина**, а 3 – **коренен показател.**

Задача 2. Да се пресметне:

а) $\sqrt[3]{27}$; б) $\sqrt[3]{125}$; в) $\sqrt[3]{-8}$; г) $\sqrt[3]{1}$; д) $\sqrt[3]{0}$; е) $\sqrt[3]{-1}$;

ж) $\sqrt[3]{13^3}$; з) $\sqrt[3]{(-6)^3}$; и) $\sqrt[3]{-13^3}$; к) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}$; л) $\sqrt[3]{0,216}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{27} = 3$, защото $3^3 = 27$; б) $\sqrt[3]{125} = 5$, защото $5^3 = 125$;

в) $\sqrt[3]{-8} = -2$, защото $(-2)^3 = -8$; г) $\sqrt[3]{1} = 1$, защото $1^3 = 1$;

д) $\sqrt[3]{0} = 0$, защото $0^3 = 0$; е) $\sqrt[3]{-1} = -1$, защото $(-1)^3 = -1$;

ж) $\sqrt[3]{13^3} = 13$, защото $13^3 = 13^3$;

з) $\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$, защото $(-6)^3 = (-6)^3$;

и) $\sqrt[3]{-13^3} = -13$, защото $(-13)^3 = -13^3$;

к) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}} = \dfrac{3}{2}$, защото $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3 = \dfrac{27}{8}$;

л) $\sqrt[3]{0,216} = 0,6$, защото $0,6^3 = 0,216$.

Свойства

Някои от свойствата на корен трети са аналогични на свойствата на корен квадратен.

От определението за корен трети следват:

Свойство 1

$(\sqrt[3]{a})^3 = a$, при a реално число.

Свойство 2

$\sqrt[3]{a^3} = a$, при a реално число.

От определението за корен трети и свойства 1 и 2 следват други свойства, чрез които се извършват действия с корени.

Свойство 3

$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}$, при a и b реални числа.

Следствия

1. $\sqrt[3]{abc...p} = \sqrt[3]{a}.\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{c}...\sqrt[3]{p}$, при $a, b, c, ...p$ реални числа.

2. $\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$, при a и b реални числа (изнасяне на множител пред корен).

3. $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3b}$, при a и b реални числа (внасяне на множител под корен).

Свойство 4

$\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$, при a и b реални числа, и $b \neq 0$.

Задача 3. Да се пресметне:

а) $\sqrt[3]{17^3}$; б) $\sqrt[3]{-17^3}$; в) $\sqrt[3]{(-8)^3}$; г) $\sqrt[3]{15\frac{5}{8}}$; д) $\sqrt[3]{16}\sqrt[3]{4}$;

е) $\sqrt[3]{343000}$; ж) $\sqrt[3]{0,512}$; з) $\dfrac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{5}}$; и) $\sqrt[3]{81}$; к) $\sqrt[3]{-0,256}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{17^3}=17$;

б) $\sqrt[3]{-17^3}=\sqrt[3]{(-17)^3}=-17$;

в) $\sqrt[3]{(-8)^3}=-8$;

г) $\sqrt[3]{15\dfrac{5}{8}}=\sqrt[3]{\dfrac{125}{8}}=\sqrt[3]{\left(\dfrac{5}{2}\right)^3}=\dfrac{5}{2}$;

д) $\sqrt[3]{16}\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{4^2.4}=4$;

е) $\sqrt[3]{343000}=\sqrt[3]{343}\sqrt[3]{1000}=\sqrt[3]{7^3}\sqrt[3]{10^3}=70$;

ж) $\sqrt[3]{0,512}=\sqrt[3]{\dfrac{512}{1000}}=0,8$;

з) $\dfrac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{\dfrac{-625}{5}}=\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$;

и) $\sqrt[3]{81}=\sqrt[3]{3^3.3}=\sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}$;

к) $\sqrt[3]{-0,256}=\sqrt[3]{(-0,4)^3.4}=\sqrt[3]{(-0,4)^3}\sqrt[3]{4}=-0,4\sqrt[3]{4}$.

Свойство 5

Ако $a<b$, то $\sqrt[3]{a}<\sqrt[3]{b}$, при a и b реални числа.

Задача 4. Да се сравнят числата:

а) $\sqrt[3]{-2}$ и $\sqrt[3]{-3}$; б) 1 и $\sqrt[3]{5}$; в) -1 и $\sqrt[3]{-25}$; г) $\sqrt[3]{-125}$ и $\sqrt{(-5)^2}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{-2}$ и $\sqrt[3]{-3}$

От $-2>-3$ следва, че $\sqrt[3]{-2}>\sqrt[3]{-3}$;

б) 1 и $\sqrt[3]{5}$

От $1=\sqrt[3]{1}$ и $1<5$ следва, че $\sqrt[3]{1}<\sqrt[3]{5}$ и $1<\sqrt[3]{5}$;

в) -1 и $\sqrt[3]{-25}$

От $-1=\sqrt[3]{-1}$ и $-1>-25$ следва, че $\sqrt[3]{-1}>\sqrt[3]{-25}$ и $-1>\sqrt[3]{-25}$;

г) $\sqrt[3]{-125}$ и $\sqrt{(-5)^2}$

От $\sqrt[3]{-125}=\sqrt[3]{(-5)^3}=-5$, $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$ и $-5<5$ следва, че $\sqrt[3]{-125}<\sqrt{(-5)^2}$.

Задачи

1. Пресметнете:

а) $\sqrt[3]{12^3}$; б) $\sqrt[3]{(-5)^6}$; в) $\sqrt[3]{-16}$; г) $\sqrt[3]{\dfrac{10000}{729}}$; д) $\sqrt[3]{2}:\sqrt[3]{-54}$; е) $\sqrt[3]{100}:\sqrt[3]{12,5}$;

ж) $\dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{128}}$; з) $\sqrt[3]{\sqrt{256}}$; и) $\sqrt[3]{-0,001}.\sqrt{200}$; к) $\sqrt{-\sqrt[3]{-216}}$.

2. Докажете равенството:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{5^6}}=5$; б) $\sqrt{64}-\sqrt[3]{64}=4$; в) $\sqrt[3]{3\dfrac{3}{8}}=1,5$; г) $(-3\sqrt[3]{2})^3=-54$.

3. Вярно ли е равенството:

а) $\sqrt[3]{-125}=\sqrt{25}$; б) $\sqrt[3]{1331}=11$; в) $-5\sqrt[3]{(-2)^3}=10$; г) $\sqrt[3]{0}-\sqrt[3]{4\frac{17}{27}}=1\frac{2}{3}$?

4. Сравнете числата:

а) $\sqrt[3]{-7}$ и $\sqrt[3]{-9}$; б) 2 и $\sqrt[3]{9}$; в) -4 и $\sqrt[3]{-63}$; г) $\sqrt[3]{-216}$ и $3\sqrt{(-2)^2}$.

5. Докажете неравенството:

а*) $\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}>2$; б) $\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{8}>0$;

в) $12-6\sqrt[3]{0,125}>0$; г) $-4\sqrt[3]{27}+4\sqrt[3]{-27}<0$.

2 КОРЕН n-ТИ. СВОЙСТВА

Понятието корен n-ти

Изучихме действието кореннуване с коренен показател две и три. Сега ще разгледаме по-общото понятие **корен n-ти**.

Определение

Нека $a \geqq 0$ е реално число и $n \geqq 2$ е естествено число. Неотрицателното реално число b, за което $b^n=a$, се нарича **корен n-ти** от a.

Записва се $b=\sqrt[n]{a}$, където a е **подкоренна величина**, а n – **коренен показател.**

Възниква въпросът съществува ли такова число b и ако съществува, дали е единствено? Отговор на този въпрос дава следната теорема:

Теорема

За всяко неотрицателно реално число a и всяко естествено число $n \geqq 2$ съществува единствено неотрицателно число b, за което $b^n=a$.

Доказателството на теоремата изисква знания, които не се разглеждат в училищния курс по математика.

От теоремата следва, че $\sqrt[n]{a}$ съществува и е еднозначно определен. Например:

$\sqrt[3]{8}=2$, защото $2>0$ и $2^3=8$; $\sqrt[4]{81}=3$, защото $3>0$ и $3^4=81$.

! Обърнете внимание, че $(-3)^4=81$, но $\sqrt[4]{81}$ не може да е (-3), защото $-3<0$.

Свойства

Някои от свойствата на корен n-ти са аналогични на свойствата на корен квадратен и на корен трети.

От определението за корен n-ти следват:

Свойство 1

$(\sqrt[n]{a})^n = a$, при $a \geqq 0$ реално число и $n \geqq 2$ – естествено число.

Свойство 2

$\sqrt[n]{a^n} = a$, при $a \geqq 0$ реално число и $n \geqq 2$ – естествено число.

От определението за корен n-ти и свойства 1 и 2 следват други свойства, чрез които се извършват действия с корени.

Свойство 3

Ако $a \geqq 0$ и $b \geqq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$, при a и b реални числа, $n \geqq 2$ – естествено число.

*

Доказателство: За да докажем свойството, ще използваме определението за корен n-ти. Достатъчно е да покажем, че при $a \geqq 0$ и $b \geqq 0$, произведението $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \geqq 0$ и $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = ab$.

От определението следва, че при $a \geqq 0$ и $b \geqq 0$, $\sqrt[n]{a} \geqq 0$ и $\sqrt[n]{b} \geqq 0$. Тогава $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \geqq 0$. От правилото за степенуване и определението получаваме $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n = ab$.

С това свойството е доказано.

*

Следствия

1. Ако $a, b, c, \ldots, p$ са неотрицателни реални числа, то $\sqrt[n]{abc\ldots p} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}\ldots\sqrt[n]{p}$, при $n \geqq 2$ – естествено число.

2. Ако $a \geqq 0$ и $b \geqq 0$ са реални числа, то $\sqrt[n]{a^n.b} = a\sqrt[n]{b}$ – изнасяне на множител пред корен.

3. Ако $a \geqq 0$ и $b \geqq 0$ са реални числа, то $a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$ – внасяне на множител под корен.

Свойство 4

Ако $a \geqq 0$ и $b > 0$, то $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, при $n \geqq 2$ – естествено число.

Доказателството на това свойство е аналогично на доказателството на свойство 3.

Задача 1. Да се пресметне:

а) $\sqrt[4]{256}$; б) $\sqrt[3]{216\,000}$; в) $\sqrt[4]{\dfrac{2}{125}}.\sqrt[4]{\dfrac{1}{160}}$; г*) $\sqrt[5]{0,00243}$; д*) $\sqrt[6]{81} : \sqrt[6]{\dfrac{1}{9}}$.

Решение:

а) $\sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{4^4} = 4$;

б) $\sqrt[3]{216000} = \sqrt[3]{2^3.3^3.10^3} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{3^3}\sqrt[3]{10^3} = 2.3.10 = 60$;

в) $\sqrt[4]{\dfrac{2}{125}}.\sqrt[4]{\dfrac{1}{160}} = \sqrt[4]{\dfrac{2}{125}.\dfrac{1}{160}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{5^3.2^4.5}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{5^4.2^4}} = \dfrac{1}{10}$;

г) $\sqrt[5]{0,00243} = \sqrt[5]{\dfrac{243}{100\,000}} = \sqrt[5]{\dfrac{3^5}{10^5}} = \dfrac{3}{10}$;

д) $\sqrt[6]{81} : \sqrt[6]{\dfrac{1}{9}} = \sqrt[6]{3^4 : \dfrac{1}{3^2}} = \sqrt[6]{3^6} = 3$.

Следващите две свойства се прилагат при коренуване на степен и корен.

Свойство 5

$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$, при $a \geqq 0$ реално число, $n \geqq 2$ и $m \geqq 2$ – естествени числа.

Свойство 6

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$, при $a \geqq 0$ реално число, $n \geqq 2$ и $m \geqq 2$ – естествени числа.

Задача 2. Да се пресметне:

а) $\sqrt{\sqrt[5]{1024}}$; б) $(\sqrt[3]{7})^7$.

Решение:

а) $\sqrt{\sqrt[5]{1024}} = \sqrt[10]{1024} = \sqrt[10]{2^{10}} = 2$;

б) $(\sqrt[3]{7})^7 = (\sqrt[3]{7})^6.\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7^6}.\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{(7^2)^3}\sqrt[3]{7} = 7^2\sqrt[3]{7} = 49\sqrt[3]{7}$.

Свойство 7

$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, при $a \geqq 0$ реално число, m, n и k – естествени числа и $n \geqq 2$.

Свойство 8

Ако $0 \leqq a < b$, то $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, при a и b реални числа и $n \geqq 2$ – естествено число.

Тези свойства се използват за сравняване на корени с различни коренни показатели.

Задача 3. Да се сравнят числата:

а) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[12]{3^9}$ и $\sqrt[4]{2^5}$.

Решение:

а) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt{2}$

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3.2]{3^2} = \sqrt[6]{9}$

$\sqrt{2} = \sqrt[2.3]{2^3} = \sqrt[6]{8}$

От $8 < 9$ следва $\sqrt[6]{8} < \sqrt[6]{9}$, т.е.

$\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

б) $\sqrt[12]{3^9}$ и $\sqrt[4]{2^5}$

$\sqrt[12]{3^9} = \sqrt[3.4]{3^{3.3}} = \sqrt[4]{3^3} = \sqrt[4]{27}$

$\sqrt[4]{2^5} = \sqrt[4]{32}$

От $27 < 32$ следва $\sqrt[4]{27} < \sqrt[4]{32}$, т.е.

$\sqrt[12]{3^9} < \sqrt[4]{2^5}$.

Задачи

1. Приведете към общ коренен показател числата:

а) $\sqrt{7}$ и $\sqrt[3]{3}$; б) $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[4]{5}$; в) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[4]{5}$; г*) $\sqrt{5}$, $\sqrt[12]{5}$ и $\sqrt[6]{5}$.

2. Извършете действията:

а) $(\sqrt[3]{5})^2$; б) $(\sqrt{2})^4$; в*) $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}}$; г) $\sqrt[3]{-27}$; д) $\sqrt[6]{(-125)^2}$; е) $\sqrt[3]{\dfrac{1000}{729}}$; ж) $\sqrt[3]{4} : \sqrt[3]{2}$;

з) $\sqrt[3]{16} : \sqrt{8}$; и) $\sqrt[3]{2}\ \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{\dfrac{1}{36}}$; к*) $\sqrt[5]{12} : \sqrt[5]{\dfrac{4}{81}}$; л*) $\dfrac{\sqrt[5]{2}\sqrt[5]{81}}{\sqrt[5]{27}\sqrt[5]{64}}$; м) $\sqrt{\sqrt{25}}$; н) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$;

о) $\sqrt[4]{10} : \sqrt[4]{2,5}$; п) $\sqrt[3]{0,001}.\sqrt[4]{10\,000}$.

3. Докажете равенството:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = 2$; б*) $\sqrt[5]{32} + \sqrt[6]{27^2} = 5$; в) $\sqrt{7\sqrt[4]{49}} = 7$; г*) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{9}}.\sqrt[6]{3} = \sqrt[3]{3}$.

4. Сравнете числата:

а) $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{5}$; б) $\sqrt{6}$ и $\sqrt[4]{35}$; в*) $3\sqrt{2}$ и $\sqrt[5]{1024}$; г*) $-\sqrt[5]{50}$ и $\sqrt[6]{10}$.

3 КОРЕН n-ТИ. УПРАЖНЕНИЕ

Дефинирахме $\sqrt[n]{a}$ при подкоренна величина неотрицателно реално число. Когато коренният показател n **е нечетно число**, можем да дефинираме $\sqrt[n]{a}$ и за отрицателно реално число a с помощта на равенството $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$. Например:

$\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{-(-27)} = -\sqrt[3]{27} = -3$; $\sqrt[5]{-32} = -\sqrt[5]{-(-32)} = -\sqrt[5]{32} = -2$.

ТЕМА 2

РЕШАВАНЕ НА РАВНИННИ ФИГУРИ

18 РЕШАВАНЕ НА УСПОРЕДНИК

Знаем, че да решим една фигура означава чрез дадени нейни елементи да намерим или изразим останалите ѝ елементи. Целта на следващите уроци е да се покаже как да решаваме четириъгълници и правилни многоъгълници, като се използват метрични зависимости и стойности на тригонометрични функции.

Броят условия или елементи, които определят еднозначно един многоъгълник зависят от вида му.

За успоредник две от условията са успоредността, следователно ни трябват още три за еднозначно определяне на фигурата.

От изученото до тук за успоредник знаем, че е четириъгълник с две по две успоредни срещуположни страни и има свойствата:

– срещуположните му страни са равни;

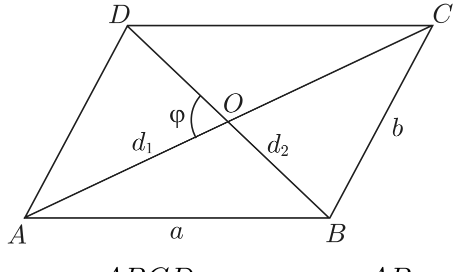
– срещуположните му ъгли са равни;

– диагоналите му взаимно се разполовяват.

Доказали сме и следната

Теорема 1

За всеки успоредник със страни a и b, и диагонали d_1 и d_2, е изпълнено равенството $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$.



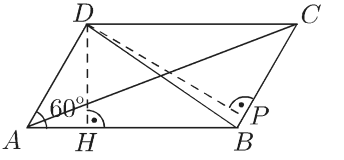
Задача 1. Успоредникът $ABCD$ има страни $AB = 8$ cm, $AD = 5$ cm и $\sphericalangle BAD = 60^\circ$. Да се намерят:

а) диагоналите; б) височините;

в) радиусите на описаните около триъгълниците ABC и ABD окръжности.

Решение:

Да означим с DP и DH височините на успоредника.



а) От $\sphericalangle BAD = 60^\circ$ и $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 180^\circ$ $\Rightarrow \sphericalangle ABC = 120^\circ$.

От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ получаваме

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos 120^\circ$$

$$AC^2 = 64 + 25 + 2.8.5.\frac{1}{2} = 129 \quad \Rightarrow AC = \sqrt{129}\,\text{cm}.$$

От косинусовата теорема за $\triangle ABD$ аналогично получаваме $BD = 7$ cm.

Може да намерим BD и използвайки равенството $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2 \Rightarrow 129 + BD^2 = 2.64 + 2.25 \Rightarrow BD^2 = 49$.

б) От правоъгълния $\triangle AHD$ намираме $DH = AD.\sin 60^\circ = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

Аналогично от правоъгълния $\triangle DPC$ намираме

$DP = CD.\sin 60^\circ = \dfrac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ cm.

в) За да намерим радиуса R_1 на описаната около $\triangle ABD$ окръжност, прилагаме синусовата теорема

$$2R_1 = \frac{BD}{\sin 60^\circ} = \frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{14\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R_1 = \frac{7\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}.$$

Аналогично, като приложим синусовата теорема за $\triangle ABC$, намираме R_2.

$$2R_2 = \frac{AC}{\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{129}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{43} \Rightarrow R_2 = \sqrt{43}\,\text{cm}.$$

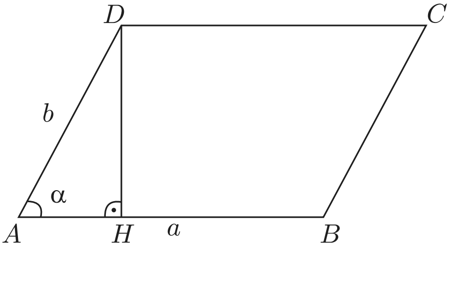
Да докажем и теореми, свързани с лице и ъгли на успоредник.

Теорема 2

За успоредник със страни a и b, и ъгъл между тях α е изпълнено $S = ab\sin\alpha$.

Доказателство:

Нека DH е височината от върха D към AB и $AD = BC = b$, а $AB = CD = a$. Тогава от правоъгълния $\triangle ADH$ следва, че $DH = AD\sin\alpha = b\sin\alpha$ и $S = DH.AB = ab\sin\alpha$.



Задача 2. Даден е успоредник $ABCD$ със страни $AB = 7$ cm, $AD = 8$ cm и $\cos \sphericalangle BAD = \dfrac{3}{7}$. Да се намери лицето на успоредника.

Решение:

За да използваме теорема 1, първо трябва да намерим синуса на дадения ъгъл.

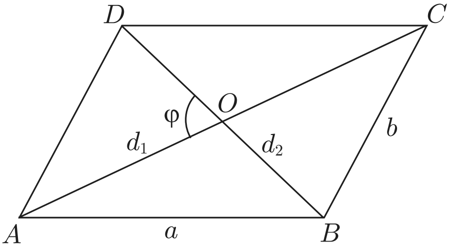
$\sin \sphericalangle BAD = \sqrt{1 - \cos^2 \sphericalangle BAD} = \sqrt{1 - \dfrac{9}{49}} = \dfrac{2\sqrt{10}}{7}$, следователно

$S_{ABCD} = ab \sin\alpha = 7.8.\dfrac{2\sqrt{10}}{7} = 16\sqrt{10}$ cm^2.

Теорема 3

За успоредник с диагонали d_1 и d_2, и ъгъл между тях φ е изпълнено $S = \dfrac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}$.

Доказателство: Нека успоредникът е $ABCD$ и точка O е пресечната точка на диагоналите му. Както знаем, точка O е среда и на AC и на DB, следователно е изпълнено, че $S_{ABO} = S_{BCO} = S_{CDO} = S_{AOD} = \dfrac{1}{4} S_{ABCD}$. Ако означим $\sphericalangle AOD = \varphi$ и приложим формулата за лице на триъгълник, получаваме, че



$$S_{ABCD} = 4S_{AOD} = 4\frac{AO.DO\sin\varphi}{2} = \frac{d_1 d_2 \sin\varphi}{2}.$$

Задача 3. Даден е успоредник $ABCD$ с диагонали $AC = 7\sqrt{3}$ cm, $BD = 8\sqrt{2}$ cm и лице $28\sqrt{3}$ cm^2. Да се намери мярката на $\sphericalangle AOD$, ако точка O е пресечната точка на диагоналите на успоредника.

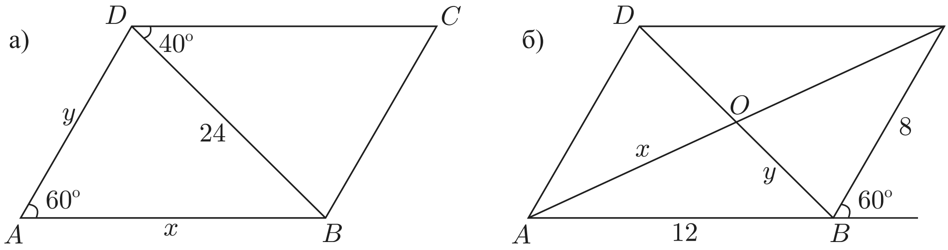
Решение:

Използвайки теорема 3, получаваме, че

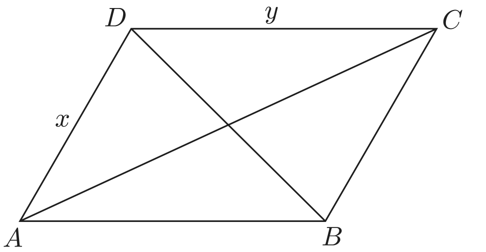
$S_{ABCD} = \dfrac{AC.BD\sin\varphi}{2} = \dfrac{7\sqrt{3}.8\sqrt{2}\sin\varphi}{2} = 28\sqrt{3} \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Следователно $\sin \sphericalangle AOD = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Това означава, че $\sphericalangle AOD$ е или 45°, или 135°. Но $7\sqrt{3} > 8\sqrt{2} \Rightarrow AC > BD$ и следователно $\sphericalangle ABC > \sphericalangle BAD$ и $AB > AD$, от което следва, че $\sphericalangle AOD < 90^\circ$ и мярката му е 45°.

Задачи

1. На чертежа е даден успоредник $ABCD$. По данните от чертежа намерете дължините на отсечките x и y.



2. На чертежа е даден успоредник $ABCD$. Намерете дължините на отсечките x и y, ако:



а) $x : y = 2 : 3$, $AC = 19$ cm, $BD = 17$ cm;

б) $y - x = 4$ cm, $AC = 14$ cm, $BD = 12$ cm.

3. Намерете дължините на диагоналите и лицето на успоредник със страни 9 cm и 12 cm и остър ъгъл $30°$.

4. Страните на правоъгълник са с дължина 8 cm и $8\sqrt{3}$ cm. Намерете ъгъла между диагоналите му.

5. Намерете периметъра и синуса на острия ъгъл на успоредник с диагонали 8 cm и 12 cm, и ъгъл между тях $60°$.

6. Намерете лицето и ъглите на успоредник със страни 3 cm и 8 cm, ако единият му диагонал има дължина 7 cm.

7. В успоредника $ABCD$ $AB = 6$, $BC = 3\sqrt{2}$, $\sphericalangle BAD = 45°$. Намерете:

а) диагоналите на успоредника;

б) косинуса на тъпия ъгъл между диагоналите;

в) височините на успоредника;

г) радиусите на описаните около $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ окръжности.

8. В успоредника $ABCD$ диагоналите се пресичат в точка O и $AC = 8$, $BD = 6$, $\sphericalangle AOB = 120°$. Намерете:

а) дължините на страните на успоредника; б) $\cos \sphericalangle BAD$ и $\cos \sphericalangle BAC$.

9. Острият ъгъл на успоредник е $45°$, а разстоянията от пресечната точка на диагоналите му до две от страните му са 4 cm и 6 cm. Намерете диагоналите на успоредника и синуса на ъгъла между тях.

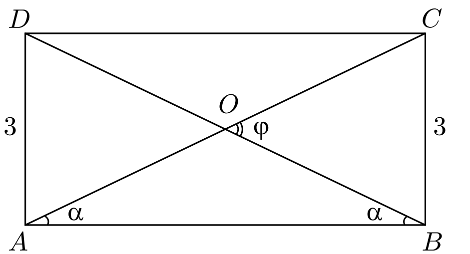
10. Точката M е среда на страната CD на успоредника $ABCD$. Намерете диагоналите на успоредника, ако $AD = 1$, $\sphericalangle BAD = 60°$ и $\sphericalangle AMB = 90°$.

19 РЕШАВАНЕ НА ВИДОВЕ УСПОРЕДНИЦИ. УПРАЖНЕНИЕ

Да приложим наученото за успоредник за намиране на елементи на видовете успоредници – правоъгълник и ромб. За целта е необходимо да използваме техните специални свойства. Тези свойства намаляват броя на условията или елементите, които трябва да са дадени за конкретната фигура с едно.

Задача 1. Лицето на правоъгълник с диагонал d е $\dfrac{d^2}{4}$. Да се намери мярката на ъгъла, който сключва диагоналът с по-голямата страна на правоъгълника. Ако дължината на по-малката страна на правоъгълника е 3 cm, да се намери дължината на по-голямата страна.

Решение:



Нека търсеният ъгъл е α, а ъгълът между диагоналите φ. Знаем, че диагоналите на правоъгълник са равни и използвайки формулата за лице на четириъгълник, получаваме, че $S = \dfrac{d^2 \sin\varphi}{2} = \dfrac{d^2}{4} \Rightarrow \sin\varphi = \dfrac{1}{2}$. Следователно ъгълът между диагоналите е 30°. От друга страна, $\varphi = 2\alpha$, следователно $\alpha = 15^\circ$. Прилагаме косинусовата теорема за $\triangle BCO$ и получаваме, че $3^2 = \dfrac{d^2}{4} + \dfrac{d^2}{4} - 2.\dfrac{d^2}{4}.\cos 30^\circ = \dfrac{d^2(2-\sqrt{3})}{4} \Rightarrow d^2 = 36\left(2+\sqrt{3}\right)$. Отново от формулата за лице на правоъгълник имаме $3.AB = \dfrac{d^2}{4} = 9\left(2+\sqrt{3}\right) \Rightarrow$ $AB = 3\left(2+\sqrt{3}\right)$ cm.

Когато търсим елементи на успоредник, е добре да подберем правилно кои формули да използваме така, че да получим търсеното. Не винаги е необходимо да намерим мярката на всеки от използваните елементи, може да използваме алгебричен израз от елементи, който да ни даде търсеното. За целта е удобно да въведем букви (параметри) и да изразим връзки между елементите на фигурите.

Задача 2. Сборът от диагоналите на ромб с лице 28 cm^2 е 15 cm. Да се намери косинусът на тъпия ъгъл на ромба.

Решение:

Нека означим диагоналите с d_1 и d_2, а страната с a. Знаем, че диагоналите на ромб са перпендикулярни и от формулите за лице на успоредник имаме, че $S = a^2 \sin\alpha = \dfrac{d_1 d_2}{2} = 28 \Rightarrow \sin\alpha = \dfrac{28}{a^2}$. Трябва да намерим a^2, като за целта съставяме системата:

$$\left| \begin{array}{l} d_1 + d_2 = 15 \\ d_1 d_2 = 2.28 \end{array} \right. \Rightarrow d_1^2 + d_2^2 = 15^2 - 2.56 = 113 \Rightarrow a^2 = \frac{113}{4}.$$

Така получаваме, че $\sin\alpha = \dfrac{28.4}{113} = \dfrac{112}{113} \Rightarrow \cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\dfrac{15}{113}$.

Задача 3. Да се намери лицето на успоредника $ABCD$, ако острият му ъгъл е α, а диагоналите му AC и BD имат съответно дължини d_1 и d_2, $d_1 > d_2$.

Решение:

Търсим лицето във вида

$$S_{ABCD} = AB.BC.\sin\sphericalangle ABC. \tag{1}$$

Прилагаме последователно косинусовата теорема за $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$:

$$\left| \begin{array}{l} BD^2 = d_2^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD\cos\sphericalangle BAD \\ AC^2 = d_1^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC\cos\sphericalangle ABC. \end{array} \right. \tag{2}$$

Понеже $\sphericalangle BAD$ и $\sphericalangle ABC$ са прилежащи ъгли в успоредник, то $\sphericalangle BAD + \sphericalangle ABC = 180^\circ \Rightarrow \sphericalangle ABC = 180^\circ - \sphericalangle BAD$ и $\cos\sphericalangle ABC = -\cos\sphericalangle BAD$. Ето защо система (2) може да се запише във вида

$$\left| \begin{array}{l} d_2^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB.AD\cos\sphericalangle BAD \\ d_1^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB.BC\cos\sphericalangle BAD. \end{array} \right. \tag{3}$$

Изваждаме почленно двете равенства и получаваме $d_1^2 - d_2^2 = 4AB.BC.\cos\sphericalangle BAD$ и тъй като $d_1^2 - d_2^2 > 0$ $\Rightarrow \cos\sphericalangle BAD > 0 \Rightarrow \sphericalangle BAD < 90^\circ$ и $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ABC = 180^\circ - \alpha$.

Равенството $d_1^2 - d_2^2 = 4AB.BC.\cos\alpha$ може да се реши относно произведението $AB.BC$, т.е. $AB.BC = \dfrac{d_1^2 - d_2^2}{4\cos\alpha}$. Сега заместваме в равенство (1) и за лицето на успоредника получаваме $S_{ABCD} = \dfrac{d_1^2 - d_2^2}{4}.\text{tg}\,\alpha$.

Решената задача ни навежда на мисълта, че лицето на успоредник може да се намери, ако са дадени двата му диагонала и негов ъгъл. Може да се провери, че това е валидно и за произволен четириъгълник.

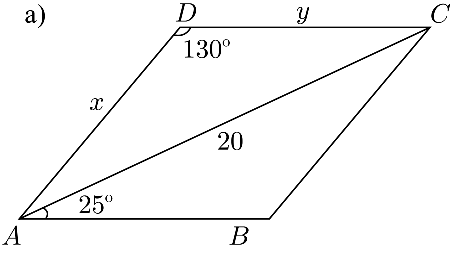
Задачи

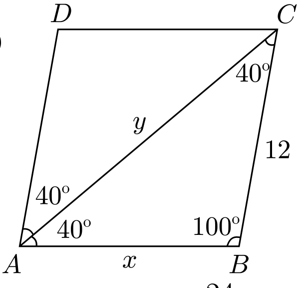
1. Намерете тангенса на тъпия ъгъл на ромб със страна 5 cm и един диагонал 6 cm.

2. Даден е правоъгълник $ABCD$. Диагоналите AC и BD се пресичат в точка O. Страната $BC = 6$, $\cos \sphericalangle BOC = \dfrac{7}{25}$. Намерете:

а) диагоналите на правоъгълника; б) AB; в) $\sin \sphericalangle BAC$.

3. Даден е успоредник $ABCD$, по данните от чертежа намерете дължините на страните x и y.

а) 

б) 

4. Лицето на ромб $ABCD$ е 24 cm^2, ако $\operatorname{tg} \sphericalangle ABC = \dfrac{24}{7}$, то намерете диагоналите на ромба.

5. Намерете лицето на успоредник $ABCD$ с диагонали 17 и 15 и даден $\cos \sphericalangle ABC = \dfrac{4}{7}$.

6. Страната на ромб $ABCD$ е 8 cm и $\sphericalangle BCD = 135°$. Окръжността, описана около $\triangle ABC$, пресича диагонала BD в точка M. Намерете дължината на отсечката BM.

7. Страната на ромба $ABCD$ има дължина 6 и $\sphericalangle BAD = 60°$. Върху страната BC е взета точката E, така че $CE = 2$. Определете разстоянието от точката E до пресечната точка на диагоналите на ромба.

8. Даден е правоъгълник $ABCD$ с лице S и пресечна точка на диагоналите O. Окръжността, описана около $\triangle ABO$, пресича за втори път правата AD в точка M, като $\operatorname{tg} \sphericalangle ABM = 1$. Намерете диагонала и периметъра на правоъгълника.

9. Върху страната MN на ромба $KLMN$ е взета точката C, така че $CN = 2CM$. Ако $\sphericalangle MNK = 120°$, намерете отношението $\dfrac{\cos \sphericalangle CKN}{\cos \sphericalangle CLM}$.

10. Намерете лицето на успоредник със страни a и b $(a > b)$ и остър ъгъл между диагоналите α.