Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

профилирана подготовка

ЕЛЕМЕНТИ НА МАТЕМАТИЧЕСКИЯ АНАЛИЗ

11. клас

РЕГАЛИЯ 6

Използвани означения:

! обърнете внимание

исторически бележки

алгоритъм при решаване на някои задачи

* ——— незадължителен текст с повишена трудност ——— *

ISBN 978-954-745-329-6

СЪДЪРЖАНИЕ

ТЕМА 1

ПОЛИНОМИ НА ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

1 ПОЛИНОМ НА ЕДНА ПРОМЕНЛИВА. РАВЕНСТВО НА ПОЛИНОМИ

От изученото в предходните класове знаем, че **едночлен** се нарича рационален израз, който е произведение от числа и букви, а **многочлен** – сбор на едночлени. Многочленът се нарича още и **полином.**

В тази тема ще разглеждаме полиноми на една променлива.

Определение 1

Израз от вида $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, където $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ са реални числа, а n е цяло неотрицателно число, се нарича **полином (многочлен)** от степен n на променливата x.

Числата $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ и a_0 са **коефициенти** на полинома, като a_n се нарича **старши коефициент,** а a_0 – **свободен член.**

За коефициентите на $P(x)$ се използва означението a_i за $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, $n \in N$.

Някои от коефициентите, с изключение на a_n, могат да бъдат равни и на нула.

При $n = 0$ получаваме общия вид на полином от нулева степен a_0, $a_0 \neq 0$. Например числото 7 е полином от нулева степен. Числото 0 също се разглежда като полином от нулева степен.

Например полиномът $x^5 - x^4 + x^3 - 4$ е от пета степен със старши коефициент $a_5 = 1$, свободен член $a_0 = -4$ и коефициенти, равни на 0, пред втората и първата степен на x.

При $n = 1$ се получава общият вид на полином от първа степен
$a_1 x + a_0, \;\; a_1 \neq 0$.

При $n = 2$ се получава общият вид на полином от втора степен
$a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \;\; a_2 \neq 0$, познат още и като квадратен тричлен
$ax^2 + bx + c, \;\; a \neq 0$.

Аналогично се получава общият вид на полиноми от трета, четвърта и т.н. степен.

Полином, на който всички коефициенти са равни на нула, се нарича **нулев** полином.

Стойност на полином

Ако в полинома $P(x)$ променливата x се замести с числото x_0 и се извършат означените действия, то полученото число $P(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0$ се нарича **стойност** на полинома $P(x)$, при $x = x_0$.

Очевидно нулевият полином има стойност нула за всяко x. Вярно е и обратното. Ако един полином приема стойност нула за всяко x, то той е нулевият полином.

Задача 1. Даден е полиномът $P(x) = x^4 + \sqrt{3}x^3 - 7x^2 + (1+\sqrt{3})x - \sqrt{3}$. Да се пресметне:

а) $P(-2)$; б) $P(\sqrt{3})$.

Решение:

а) $P(-2) = (-2)^4 + \sqrt{3}(-2)^3 - 7(-2)^2 + (1+\sqrt{3})(-2) - \sqrt{3} = -14 - 11\sqrt{3}$;

б) $P(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^4 + \sqrt{3}(\sqrt{3})^3 - 7(\sqrt{3})^2 + (1+\sqrt{3})\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$.

! За някои стойности на променливата x стойността на полинома е нула, а за други е различна от нула.

Задача 2. Да се пресметне сборът от коефициентите в нормалния вид на полинома, еквивалентен на израза $(\sqrt{2}x^5 - 2x^3 + 1)^{11}(-x^7 + 2x^4 + \sqrt{2})^{13}$.

Решение:

Нека $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ е нормалният вид на дадения израз. При $x = 1$ получаваме $P(1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0$, което е търсеният сбор.

Следователно $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = P(1) = (\sqrt{2} - 2 + 1)^{11}(-1 + 2 + \sqrt{2})^{13} = (\sqrt{2} - 1)^{11}.(\sqrt{2} + 1)^{13} = (\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}$.

Равенство на полиноми

Определение 2

Полиномите $P(x)$ и $Q(x)$ **са равни**, ако са от една и съща степен и коефициентите пред еднаквите степени на променливата са съответно равни.

Равните полиноми имат едни и същи стойности за всяка стойност на тяхната променлива x.

Задача 3. Дадени са полиномите $A(x) = x^4 - 3x + 2$ и $B(x) = (x-1)(x^3 + bx^2 + ax - 2)$. Да се намерят числата a и b, за които $A(x) = B(x)$.

Решение:

Привеждаме $B(x)$ в нормален вид:

$B(x) = x^4 + (b-1)x^3 + (a-b)x^2 - (a+2)x + 2$.

От условието $A(x) = B(x)$ следва, че коефициентите пред съответните степени са равни, т.е. $b - 1 = 0$, $a - b = 0$ и $a + 2 = 3$, откъдето $a = 1$ и $b = 1$.

Задачи

1. Определете степента, старшия коефициент и свободния член на всеки от полиномите, зададени с изразите:

а) $P(x) = (x+2)^3 - x^2$; б) $P(x) = (x+2)(x^2-1)^2$; в) $P(x) = \dfrac{x^4-16}{x-2}, x \neq 2$.

2. Даден е полиномът $P(x) = -x^5 + \sqrt{2}x^4 + 3x^2 - (1-\sqrt{2})x - 3\sqrt{2}$. Пресметнете:

а) $P(0)$; б) $P(-1)$; в) $P(-3)$; г) $P(\sqrt{2})$.

3. Намерете сбора от коефициентите в нормалния вид на полинома:

а) $(x^3 - 5x + 2)^{211}.(3 - 7x + 9x^2 - 5x^3)^{195}$;

б) $(1 - 9x^2 - x^7)^n(1 + 9x^2 - x^7)^n$.

4. Докажете, че сборът от коефициентите в нормалния вид на полинома $P(x) = (2 + 3x^2 - x^5)^n(2 - 3x^2 - x^5)^{2n}$ е положително число.

5. Определете стойностите на a и b, за които полиномите $A(x)$ и $B(x)$ са тъждествено равни:

а) $A(x) = -x^3 - 2x^2 + 1$ и $B(x) = 1 - (b-1)x^2 + (a+1)x^3$;

б) $A(x) = 3x^5 - x^4 + 9x^3 - 12x^2 - 27$ и $B(x) = (x^2+3)(3x^3 - x^2 + ax + b)$;

в) $A(x) = (x-1)(x^4 - ax^3 + 2x^2 + 2x + b)$ и $B(x) = x^5 + x^3 - 2$;

г) $A(x) = x^6 - x^4 + 3x^2 - 60$ и $B(x) = (x-2)(x^5 + 2x^4 + bx^3 + 6x^2 + ax + 30)$;

д) $A(x) = (x-a)(x-10)$ и $B(x) = (x+b)^2$.

2 ДЕЙСТВИЯ С ПОЛИНОМИ НА ЕДНА ПРОМЕНЛИВА

Действията събиране, изваждане и умножение на полиноми на една променлива се извършват по правилата за действия с цели рационални изрази. При това сборът, разликата и произведението на два полинома са също полиноми.

Задача 1. Дадени са полиномите $A(x) = x^2 + 2x - 3$ и $B(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$. Да се намерят $A(x) + B(x)$, $A(x) - B(x)$, $A(x).B(x)$ и да се определи степента на всеки от тях.

Решение:

$A(x) + B(x) = x^2 + 2x - 3 + x^3 - 3x^2 + 4x - 1 = x^3 - 2x^2 + 6x - 4$.

Сборът е полином от трета степен.

$A(x)-B(x)=x^2+2x-3-(x^3-3x^2+4x-1)=x^2+2x-3-x^3+3x^2-4x+1$
$\qquad=-x^3+4x^2-2x-2.$

Разликата е полином от трета степен.

$A(x).B(x)=(x^2+2x-3)(x^3-3x^2+4x-1)$
$\qquad=x^5-3x^4+4x^3-x^2+2x^4-6x^3+8x^2-2x-3x^3+9x^2-12x+3$
$\qquad=x^5-x^4-5x^3+16x^2-14x+3.$

Удобен начин за записване на произведението

$$A(x).B(x)=x^5-x^4-5x^3+16x^2-14x+3 \text{ е:}$$

$$\begin{array}{rl} (x^2+2x-3)(x^3-3x^2+4x-1)= & x^5-3x^4+4x^3-x^2 \\ & \quad +2x^4-6x^3+8x^2-2x \\ & \qquad\quad -3x^3+9x^2-12x+3 \\ \hline & x^5-x^4-5x^3+16x^2-14x+3. \end{array}$$

Произведението е полином от пета степен.

При деление на два полинома е в сила теорема, аналогична на теоремата за деление на числа с частно и остатък.

Теорема

Нека $A(x)$ и $B(x)$ са полиноми, при които $B(x) \neq 0$. Съществуват единствени полиноми $Q(x)$ и $R(x)$, които удовлетворяват условието:

$$A(x)=Q(x).B(x)+R(x), \text{ където}$$

степента на $R(x)$ е по-малка от степента на $B(x)$, или $R(x)=0$.

Полиномът $A(x)$ се нарича делимо, $B(x)$ – делител, $Q(x)$ – частно и $R(x)$ – остатък.

Равенството от теоремата може да се запише и така

$$\frac{A(x)}{B(x)}=Q(x)+\frac{R(x)}{B(x)}.$$

Когато $R(x)=0$, казваме, че полиномът $A(x)$ се дели на $B(x)$ без остатък.

Нека степента на $A(x)$ е n, степента на $B(x)$ е m и $n \geqq m$. Тогава степента на $Q(x)$ е $n-m$. Степента на $R(x)$ е по-малка от степента на $B(x)$, или $R(x)$ е нулевият полином.

Задача 2. Да се раздели $A(x)=2x^5-5x^4+3x^2-x+1$ на $B(x)=x^3-2x^2-x+2$.

Решение:

I начин

1 От степените на делимото и делителя определяме степените на частното и възможно най-високата степен на остатъка:

Степента на $A(x)$ е 5, степента на $B(x)$ е 3, степента на $Q(x)$ е $5-3=2$ и степента на $R(x)$ е по-малка от 3, т.е. степента на $R(x)$ е по-малка или равна на 2.

2 Записваме общия вид на полиномите, които са частното и остатъка:
$Q(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ и $R(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$, където a_2,a_1,a_0,b_2,b_1 и b_0 са съответните коефициенти.

3 Записваме равенството $A(x)=Q(x).B(x)+R(x)$:
$2x^5-5x^4+3x^2-x+1=(a_2x^2+a_1x+a_0)(x^3-2x^2-x+2)+b_2x^2+b_1x+b_0$ $=a_2x^5+(a_1-2a_2)x^4+(-a_2-2a_1+a_0)x^3+(2a_2-2a_0-a_1+b_2)x^2+(2a_1-a_0+b_1)x+2a_0+b_0.$

4 Приравняваме коефициентите пред съответните степени на променливата и с последователно заместване определяме коефициентите на частното и остатъка:

$$\left|\begin{array}{lll} a_2=2 & & \\ a_1-2a_2=-5 & \Longrightarrow a_1=-1 & \\ -a_2-2a_1+a_0=0 & \Longrightarrow a_0=0 & Q(x)=2x^2-x \\ 2a_2-2a_0-a_1+b_2=3 & \Longrightarrow b_2=-2 & \\ 2a_1-a_0+b_1=-1 & \Longrightarrow b_1=1 & \\ 2a_0+b_0=1 & \Longrightarrow b_0=1 & R(x)=-2x^2+x+1. \end{array}\right.$$

Следователно $2x^5-5x^4+3x^2-x+1=(2x^2-x)(x^3-2x^2-x+2)+(-2x^2+x+1)$.

Проверка: $(2x^2-x)(x^3-2x^2-x+2)+(-2x^2+x+1)$
$$=2x^5-4x^4-2x^3+4x^2-x^4+2x^3+x^2-2x-2x^2+x+1$$
$$=2x^5-5x^4+3x^2-x+1.$$

Този подход се нарича **метод на неопределените коефициенти**.

II начин

Обикновено при деление на полиноми изчисленията се извършват по начин, подобен на делението на многоцифрени числа.

1 Подреждаме полиномите по намаляващите степени на променливата.

2 Делим старшите членове на делимото и делителя и получаваме поредния едночлен от частното.

3 Умножаваме делителя с този едночлен и получения полином изваждаме от делимото.

$$\begin{array}{rrrrrr|l} & 2x^5 & -5x^4 & +0.x^3 & +3x^2 & -x+1 & x^3-2x^2-x+2 \\ \cline{7-7} - & 2x^5 & -4x^4 & -2x^3 & +4x^2 & & 2x^2-x=Q(x) \\ \cline{2-5} & & -x^4 & +2x^3 & -x^2 & -x+1 & \\ - & & -x^4 & +2x^3 & +x^2 & -2x & \\ \cline{3-6} & & & & -2x^2 & +x+1=R(x) & \end{array}$$

4 Получената разлика разглеждаме като ново делимо и повтаряме стъпки

2 и 3, докато се получи полином от степен, по-малка от степента на делителя или 0.

Следователно $2x^5-5x^4+3x^2-x+1=(2x^2-x)(x^3-2x^2-x+2)+(-2x^2+x+1)$, или $\dfrac{2x^5-5x^4+3x^2-x+1}{x^3-2x^2-x+2}=2x^2-x+\dfrac{-2x^2+x+1}{x^3-2x^2-x+2}$.

Виждаме, че при втория начин неизвестните коефициенти се получават в същата последователност, както и при първия начин.

Задачи

1. Дадени са полиномите:
$A(x)=x^4-3x^3+x^2-4x+6$ и $B(x)=x^3+4x^2-3x+2$. Намерете:
а) $A(x)+B(x)$; б) $A(x)-B(x)$; в) $A(x).B(x)$.
Определете от коя степен са сборът, разликата и произведението.

2. Намерете частното и остатъка от делението на полинома $A(x)$ на полинома $B(x)$:
а) $A(x)=x^3+6x^2+11x+6$, $B(x)=x^2-1$;
б) $A(x)=5x^4-x^3-x-4$, $B(x)=x^2-4$;
в) $A(x)=5x^3-2x^2-2x-1$, $B(x)=x^2+4x+3$;
г) $A(x)=x^4+7x^3+18x^2+20x+8$, $B(x)=x^2+2x+1$;
д) $A(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+1$, $B(x)=x^2-x-2$;
е) $A(x)=x^6-3x^5-4x^3+x-1$, $B(x)=x^2+x+1$;
ж) $A(x)=x^7-x^6-3x^3+x+1$, $B(x)=x^2-x+1$;
з) $A(x)=x^5+3x^4-20x^3-48x^2+64x$, $B(x)=x+5$;
и) $A(x)=x^6-3x^5-x^4+2x^3+3x^2+x-3$, $B(x)=x-3$;
к) $A(x)=2x^7+3x^6-3x-2$, $B(x)=x-1$.

3. Намерете остатъка от делението на полинома
$A(x)=x^{243}+x^{81}+x^{27}+x^9+x^3+x+1$ на полинома:
а) $x-1$; б) $x+1$; в) x^2-1.

4. Намерете целите стойности на a и b, при които полиномът $A(x)$ се дели на полинома $B(x)$:
а) $A(x)=x^4+2x^3-16x^2-2x+15$ и $B(x)=x^3+ax^2-17x+b$;
б) $A(x)=2x^3-8x^2+9x-9$ и $B(x)=2x^2+ax+b$;
в) $A(x)=x^4+x^3+ax+b$ и $B(x)=x^2+x+1$.

Упътване: Използвайте метода на неопределените коефициенти за равенството $A(x)=Q(x).B(x)$.

ТЕМА 2

ЧИСЛОВИ РЕДИЦИ

17 МЕТОД НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА ИНДУКЦИЯ

Твърденията в математиката се делят на общи и частни. Например твърдението „всички правилни дроби са по-малки от единица“ е общо, а твърдението „дробта $\frac{7}{11}$ е по-малка от единица“ е частно.

Преходът, при който от общо твърдение следва частно твърдение, се нарича **дедукция**. Например от общото твърдение „тангенсът на всеки остър ъгъл е положителен“, с помощта на твърдението „ъгъл 20° е остър“, следва частното твърдение „тангенс от ъгъл 20° е положителен“.

Преходът, при който от частното твърдение се извежда общо, се нарича **индукция**. Чрез индукция могат да се правят както верни, така и неверни изводи. Например от твърденията „числото 14 се дели на 2“, „числото 24 се дели на 2“ и „числото 74 се дели на 2“ може да се изведе „всяко естествено число с цифра на единиците 4 се дели на 2“ и невярното твърдение „всяко двуцифрено число се дели на 2“.

Възниква въпросът кога с индукция могат да се правят верни и кога неверни изводи? Ако общият извод е направен на базата от всички възможни частни случаи, то той винаги е верен. В този случай използваната индукция е **пълна индукция**. Но проверката на всички частни случаи най-често е невъзможна. Тогава се използва методът на **пълната математическа индукция**. В основата на този метод е следната аксиома:

Аксиома

Ако M е подмножество на множеството на естествените числа N и са в сила условията:

- $1 \in M$;
- ако $n \in M$, то и $n+1 \in M$,

тогава множеството M съвпада с N.

Аксиомата е от системата аксиоми на Джузепе Пеано (1858 – 1932), с помощта на която могат да се изведат свойствата на естествените числа.

С помощта на тази аксиома се доказва следната

Теорема

Нека t е неотрицателно цяло число. Едно твърдение е вярно за всяко цяло число $n \geqq t$, ако е вярно за $n = t$ и от верността му за някакво число $n = k \geqq t$ следва, че е вярно за $n = k + 1$.

Прилагането на теоремата предполага доказателството на два факта:

• даденото твърдение е вярно за цялото число t;

• твърдението е вярно за $n = k + 1$, ако е вярно за $n = k$, където $k \geqq t$ е цяло число.

Задача 1. Да се докаже, че за всяко цяло неотрицателно число е изпълнено тъждеството $2 + 4 + 6 + ... + 2(n - 1) + 2n = n(n + 1)$.

Решение:

1 Проверяваме верността на твърдението при $n = 1$.
Наистина $2 = 1(1 + 1)$.

2 Допускаме, че твърдението е вярно при $n = k$.
Нека $2 + 4 + 6 + ... + 2(k - 1) + 2k = k(k + 1)$.

3 Доказваме, че твърдението е вярно при $n = k + 1$, т.е.
$2 + 4 + 6 + ... + 2(k - 1) + 2k + 2(k + 1) = (k + 1)(k + 2)$.

Последователно преобразуваме лявата страна до получаване на дясната, като използваме предположение 2.

$$2+4+6+...+2(k-1)+2k+2(k+1) = k(k+1)+2(k+1) = (k+1)(k+2)$$

4 Правим извод, че твърдението е вярно за всяко естествено число n, т.е.
$2 + 4 + 6 + ... + 2(n - 1) + 2n = n(n + 1)$ за всяко $n \in N$.

Задача 2. Да се намери за кои естествени числа n е вярно:

а) $1.1! + 2.2! + 3.3! + \cdots + n.n! = (n + 1)! - 1$; б) $2^n > 5n$.

Решение:

а)

1 Проверяваме верността на твърдението при $n = 1$.
Очевидно е, че при $n = 1$ е изпълнено $1.1! = (1 + 1)! - 1$.

2 Допускаме, че твърдението е вярно при $n = k$, т.е.
$1.1! + 2.2! + \cdots + k.k! = (k + 1)! - 1$.

3 Доказваме, че твърдението е вярно при $n = k + 1$, т.е.
$1.1! + 2.2! + \cdots + k.k! + (k + 1)(k + 1)! = (k + 2)! - 1$.

Последователно преобразуваме лявата страна до получаване на дясната.
$1.1! + 2.2! + \ldots + k.k! + (k+1)(k+1)! = (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)!$
$= (k+1)!(1+k+1) - 1 = (k+1)!(k+2) - 1 = (k+2)! - 1.$
При тези преобразувания използвахме предположението **2**.

4 Правим извод, че твърдението е вярно за всяко естествено число n, т.е.
$1.1! + 2.2! + ... + n.n! = (n+1)! - 1$ за всяко $n \in N$.
б)

1 Проверяваме, че при $n = 1, 2, 3$ и 4 неравенството не е вярно, а при $n = 5$ е вярно, защото $2^5 > 5.5$.

2 Допускаме, че $2^k > 5k$ е вярно, при $k \geqq 5$.

3 Ще докажем, че за $n = k+1$ е изпълнено, че $2^{k+1} > 5(k+1)$.
Наистина, като използваме предположението **2**, получаваме

$2^{k+1} = 2^k.2 > 5k.2 = 5k + 5k > 5k + 5 = 5(k+1)$, т.е. $2^{k+1} > 5(k+1)$, при $k > 5$.

4 Неравенството $2^n > 5n$ е вярно за всяко $n \geqq 5$.

Задачи

1. Докажете с метода на математическата индукция равенството:
а) $1.2.3 + 2.3.4 + ... + n(n+1)(n+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$;
б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$;
в) $\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) ... \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{2n+2}$;
г) $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + ... + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}$;
д) $\frac{1^2}{1.3} + \frac{2^2}{3.5} + \frac{3^2}{5.7} + ... + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

2. Докажете тъждеството:
$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 + 2\left(a_1a_2 + a_1a_3 + ... + a_{n-1}a_n\right)$.

3. Докажете неравенството:
а) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$, при $n \geqq 1$;
б) $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$, при $n \geqq 2$.

18 МЕТОД НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА ИНДУКЦИЯ. УПРАЖНЕНИЕ 1

Чрез метода на математическата индукция се решават много и разнообразни задачи от делимост на числата, тригонометрията, геометрията и други дялове на математиката.

Задача 1. Да се докаже, че за всяко естествено число n, числото $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ се дели на 84.

Решение:

1 При $n = 1,\ 4^2 - 3^2 - 7 = 0$ се дели на 84.

2 Нека при $n = k \geqq 1,\ 4^{2k} - 3^{2k} - 7$ се дели на 84.

3 Ще докажем, че при $n = k + 1,\ 4^{2(k+1)} - 3^{2(k+1)} - 7$ се дели на 84. Действително $4^{2(k+1)} - 3^{2(k+1)} - 7 = 4^{2k}.16 - 3^{2k}.9 - 7 = 16(4^{2k} - 3^{2k} - 7) + 7(3^{2k} + 15)$.

От предположение **2** $4^{2k} - 3^{2k} - 7$ се дели на 84. Затова остава да докажем, че $7(3^{2k} + 15)$ се дели на 84, т.е. $3^{2k} + 15$ се дели на 12. За доказателството отново ще използваме математическа индукция.

При $k = 1$, $3^2 + 15 = 24$ се дели на 12. Нека при $k = m$ е вярно, че $3^{2m} + 15$ се дели на 12. Ще докажем, че при $k = m + 1$, $3^{2(m+1)} + 15$ се дели на 12. Действително $3^{2(m+1)} + 15 = 3^{2m}.9 + 15 = 9(3^{2m} + 15) - 120$. Но $3^{2m} + 15$ и 120 се делят на 12. Следователно $3^{2(m+1)} + 15$ се дели на 12. Така доказахме, че $7(3^{2k} + 15)$ се дели на 84.

4 Следователно $4^{2n} - 3^{2n} - 7$ се дели на 84 при всяко естествено число n.

Задача 2. Да се докаже, че сборът на вътрешните ъгли на изпъкнал n-ъгълник е $\pi(n - 2)$, където $n \geqq 3$.

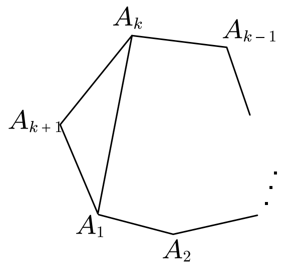
Решение:

1 При $n = 3$ сборът на ъглите е π.

2 Нека за $n = k \geqq 3$ сборът на ъглите е $\pi(k - 2)$.

3 Ако $n = k + 1$, ще докажем, че сборът на ъглите е $\pi(k - 1)$.

Многоъгълникът $A_1A_2...A_kA_{k+1}$ е съставен от многоъгълника $A_1A_2...A_k$ и $\triangle A_1A_kA_{k+1}$. Затова сборът от ъглите на многоъгълника $A_1A_2...A_kA_{k+1}$ е равен на сбора от ъглите на многоъгълника $A_1A_2...A_k$ и $\triangle A_1A_kA_{k+1}$, т.е. $\pi(k-2)+\pi=\pi(k-1)$.



4 Следователно сборът на ъглите на многоъгълника $A_1A_2...A_n$ е $\pi(n-2)$, при $n \geqq 3$.

Задача 3. Да се докаже, че за всяко естествено число n е вярно

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+...+\cos n\alpha=\frac{\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \text{ при } \sin\frac{\alpha}{2}\neq 0.$$

Решение:

1 Проверяваме при $n=1$, $\cos\alpha=\dfrac{\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\cos\alpha$.

2 Допускаме, че за $n=k\geqq 1$ е вярно

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+...+\cos k\alpha=\frac{\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}\sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

3 Ще докажем, че за $n=k+1$ е вярно

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos k\alpha+\cos(k+1)\alpha=\frac{\cos\frac{(k+2)\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Като използваме предположение **2**, пресмятаме

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos k\alpha+\cos(k+1)\alpha=\frac{\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}\sin\frac{k\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\cos(k+1)\alpha.\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2k+1)\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}+\frac{\frac{1}{2}\left(\sin\frac{(2k+3)\alpha}{2}-\sin\frac{(2k+1)}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$=\frac{-\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{(2k+3)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\cos\frac{(k+2)\alpha}{2}\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

4 Следователно при $\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$ равенството е вярно за всяко $n\in N$.

Задачи

1. Докажете, че за всяко естествено число n:

а) $2^{2n}+15n-1$ се дели на 9; б) $11^{n+2}+12^{2n+1}$ се дели на 133;

в) 7^n-1 се дели на 6; г) $2^{2^{n+1}}+2^{2^n}+1$ се дели на 21.

2. Докажете, че в изпъкнал n-ъгълник ($n>3$), броят на диагоналите е $\frac{n(n-3)}{2}$.

3. Дадени са n прави в равнината такива, че всеки две от тях се пресичат и никои три нямат обща точка. Докажете, че броят на частите, на които правите разделят равнината, е $\frac{n(n+1)}{2}+1$.

4. Докажете равенството:

а) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\ldots\cos 2^n\alpha=\dfrac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$;

б) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha\sin\dfrac{n}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

19 МЕТОД НА МАТЕМАТИЧЕСКАТА ИНДУКЦИЯ. УПРАЖНЕНИЕ 2

Методът на математическата индукция може да се използва и при намиране на някои сборове.

Задача 1. Да се намери сборът $S_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$, $n\in N$.

Решение:

Нека съставим хипотеза за формулата на търсения сбор:

- при $n=1$, $S_1=\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$;
- при $n=2$, $S_2=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}=\frac{2}{3}$;
- при $n=3$, $S_3=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}=\frac{3}{4}$;
- при $n=4$, $S_4=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}=\frac{4}{5}$.

Предполагаме, че $S_n=\frac{n}{n+1}$. Ще докажем това твърдение чрез метода на математическата индукция.

1 За $n=1$ имаме $\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1+1}$.

ТЕМА 3

ФУНКЦИИ. НЕПРЕКЪСНАТОСТ И ДИФЕРЕНЦИРУЕМОСТ

29 ФУНКЦИИ. НАЧИНИ НА ЗАДАВАНЕ. ПРЕГОВОР

Живеем в свят на взаимовръзки и зависимости. Например дължината на сянката на дърво зависи от ъгъла на издигане на Слънцето над хоризонта. Температурата на въздуха зависи от земната повърхност. Летателните качества на самолета зависят от формата му.

Определение 1

Променливата величина y е **функция** на аргумента x, когато на всяка стойност на x от множество, наречено дефиниционно, се съпоставя една определена стойност на y.

Записва се $y = f(x)$.

Една функция е зададена, ако са определени:

• нейното **дефиниционно множество**;

• **правилото** f, по което на всяко x_0 от дефиниционното множество се съпоставя число $y_0 = f(x_0)$.

Числото y_0 се нарича **функционална стойност** в x_0, а всички стойности на y образуват **множеството от функционални стойности**.

Обикновено дефиниционното множество се означава с D, а множеството от функционални стойности – с E.

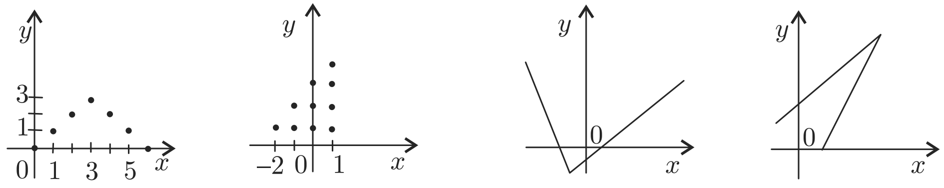
Когато множествата D и E са съставени от числа се казва, че f е числова функция. Ние ще разглеждаме предимно такива функции.

Определение 2

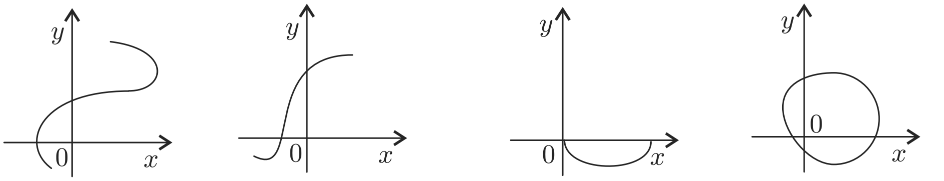
Множеството от всички точки в равнината, в която е зададена координатна система, абсцисите на които са числата от дефиниционното множество на функцията $y = f(x)$, а ординатите им са съответните функционални стойности, се нарича **графика** на функцията $y = f(x)$.

Не всяко множество от точки в една координатна система може да се разглежда като графика на функция.

Задача 1. Да се определи кои зависимости между променливите x и y са графика на функция с аргумент x.



а) б) в) г)



д) е) ж) з)

Решение:

Графика на функция с аргумент x са зависимостите от фиг. а), в), е) и ж), защото на всяка стойност на x съответства точно една стойност на y.

Линиите на фиг. б), г), д) и з) не са графика на функция с аргумент x, защото съществува стойност на x, на която съответстват две или повече стойности на y.

Познати начини за задаване на функция са:

• **описателен** – при този начин правилото, по което се получават стойностите на функцията, се описва с текст.

Например глобите на КАТ, в сила от месец януари 2020 г., за превишена скорост в населено място са:

– от 11 km/h до 20 km/h – 50 лв.;

– над 20 km/h до 30 km/h – 100 лв. и отнемане на 2 контролни точки;

– над 30 km/h до 40 km/h – 400 лв. и 6 точки;

– над 40 km/h до 50 km/h – 600 лв. и 12 точки;

– над 50 km/h – 700 лв. и за всеки следващи 5 km/h глобата се увеличава с 50 лв., отнемане на 16 точки и книжката за три месеца.

В този пример превишената скорост е аргументът, а глобата е функционалната стойност.

• **табличен** – при този начин всички стойности на аргумента и съответните им функционални стойности се задават чрез таблица.

Например чрез таблица могат да се запишат квадратите или кубовете на някои естествени числа, тригонометричните стойности на ъглите от $0°$ до $90°$ и други.

• **аналитичен** – при този начин правилото, по което се получават стойностите на функцията, се задава с формула.

Например с формулата $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ се задава зависимостта между обема на кълбото и радиуса, където R е аргумент, а V е функция с дефиниционно множество $R > 0$.

• **графичен** – при този начин нагледно се вижда връзката между аргумента и функцията с помощта на графика.

Например чрез уреда барограф се записва върху диаграмна хартия изменението на атмосферното налягане с течението на времето.

Задача 2. Дадена е функцията $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$. Да се пресметне:

а) $f(-1)$; б) $f(0)$; в) $f(a+2)$; г) $f\left(\frac{1}{a+2}\right)$.

Решение:

$f(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

а) $f(-1) = 3(-1)^2 - 2(-1) - 1 = 4$;

б) $f(0) = 3.0^2 - 2.0 - 1 = -1$;

в) $f(a+2) = 3(a+2)^2 - 2(a+2) - 1 = 3a^2 + 10a + 7$;

г) $f\left(\frac{1}{a+2}\right) = 3\left(\frac{1}{a+2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{a+2}\right) - 1 = -\frac{a^2+6a+5}{(a+2)^2}$.

Задача 3. Дадена е функцията $f(x) = x^2 - 12x + 3$. Да се намерят стойностите на x, за които $f(x) = f\left(\frac{x+8}{x-1}\right)$.

Решение:

$x^2 - 12x + 3 = \left(\frac{x+8}{x-1}\right)^2 - \frac{12(x+8)}{x-1} + 3 \Leftrightarrow$

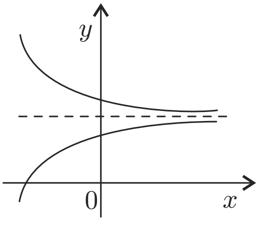
$(x^2 - 12x)(x^2 - 2x + 1) = x^2 + 16x + 64 - 12(x+8)(x-1) \Leftrightarrow$

$x^4 - 14x^3 + 36x^2 + 56x - 160 = 0$.

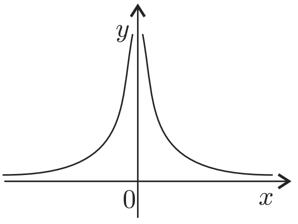
Чрез схемата на Хорнер намираме $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 4$ и $x_4 = 10$.

Задачи

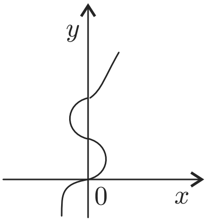
1. Определете кои зависимости между x и y са графика на функция с аргумент x.



а)



б)



в)

2. Дадена е функцията $f(x)=\dfrac{7-x^2}{5-x+x^2}$. Намерете:

а) $\dfrac{1}{f(x)}$; б) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. Дадена е функцията $f(x)=x^2+x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$. Докажете, че $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$.

4. Пресметнете $f(x)=\dfrac{36}{x^2}+x^2$, ако $\dfrac{6}{x}+x=5$.

5. Дадена е функцията $f(x)=x^2-2x+3$. Намерете корените на уравненията:

а) $f(x)=f(0)$; б) $f(x)=f(-1)$; в) $f(x)=f(x^2)$.

6. Дадена е функцията $f(x)=ax^2+bx+5$, за която е вярно тъждеството $f(x+1)-f(x)=8x+3$. Намерете a и b.

7. Докажете тъждеството $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$, ако $f(x)=\dfrac{x^6+1}{x^3}-\dfrac{x^2+1}{x}$.

8. Намерете стойностите на x, за които $|f(x)+g(x)|=|f(x)|+|g(x)|$, ако $f(x)=x-1$ и $g(x)=x-3$.

30 ДЕЙСТВИЯ С ФУНКЦИИ

За да е дефинирана една числова функция $y=f(x)$, трябва да са дадени дефиниционното множество D и правилото f, по което на всяко $x_0\in D$ се съпоставя число $y_0=f(x_0)$. Много често дадена функция се записва с помощта на математически израз, без да е определена нейната дефиниционна област. В този случай се подразбира, че функцията е дефинирана за всяко $x\in \mathrm{R}$, за което има смисъл дадения т израз.

Задача 1. Да се определи дефиниционното множество на функцията:

а) $y=\dfrac{1}{x^2+x-6}$; б) $y=\sqrt[4]{x^2+x-6}$; в) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x-6}}$;

г) $y=\lg(x^2+x-6)$; д) $y=\log_{x-3}(x^2+x-6)$; е) $y=\sqrt[3]{x^2+x-6}$.

Решение:

а) Функцията $y=\dfrac{1}{x^2+x-6}$ е дробна функция. Тя е дефинирана при всички стойности на независимата променлива x освен тези, които анулират знаменателя.

$D: x^2+x-6\neq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(-3;2)\cup(2;+\infty)$.

б) Коренният показател на функцията $y=\sqrt[4]{x^2+x-6}$ е четно число. Тя съществува при всички стойности на x, за които подкоренната величина е неотрицателно число.

$D: x^2+x-6\geqq 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[2;+\infty)$.

в) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x-6}}$,

$D : \left| \begin{array}{l} x^2+x-6 \geqq 0 \\ x^2+x-6 \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x^2+x-6>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty)$.

г) Функцията $y = \lg(x^2+x-6)$ е логаритмична с основа 10. Тя е дефинирана за $D : x^2+x-6>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty)$.

д) Функцията $y = \log_{x-3}(x^2+x-6)$ е логаритмична с основа $x-3$. Тя е дефинирана за $D : \left| \begin{array}{l} x^2+x-6>0 \\ x-3>0 \\ x-3 \neq 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow x \in (3;4) \cup (4;+\infty)$.

е) Коренният показател на функцията $\sqrt[3]{x^2+x-6}$ е нечетно число. Тя е дефинирана за всички стойности на x.

$D : x \in (-\infty;+\infty)$.

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са функции, дефинирани съответно в множествата D_f и D_g. Функцията y, дефинирана в множеството $D = D_f \cap D_g$, се нарича:

- **сбор** на $f(x)$ и $g(x)$, ако $y = f(x)+g(x)$;
- **разлика** на $f(x)$ и $g(x)$, ако $y = f(x)-g(x)$;
- **произведение** на $f(x)$ и $g(x)$, ако $y = f(x).g(x)$;
- **частно** на $f(x)$ и $g(x)$, ако $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ и $x \in D \backslash M$, където множеството M съдържа стойностите на x, за които $g(x)=0$.

Например за $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ и $g(x) = \sqrt{1+x}, x \in [-1;+\infty)$ функцията y е:

- сбор, ако $y = \dfrac{1}{x} + \sqrt{1+x}, x \in [-1;0) \cup (0;+\infty)$;
- разлика, ако $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1+x}, x \in [-1;0) \cup (0;+\infty)$;
- произведение, ако $y = \dfrac{1}{x}.\sqrt{1+x}, x \in [-1;0) \cup (0;+\infty)$;
- частно, ако $y = \dfrac{1}{x\sqrt{1+x}}, x \in (-1;0) \cup (0;+\infty)$.

Задача 2. Да се определи множеството от допустими стойности на функцията:

а) $y = \sqrt{x^2-1} + \dfrac{1}{x+3}$; б) $y = \dfrac{\sqrt{4x-x^2+5}}{\log_2(x^2-5x+6)}$.

Решение:

а) Множеството от допустими стойности на $y = \sqrt{x^2-1} + \dfrac{1}{x+3}$ се определя от системата

$$\left| \begin{array}{l} x^2-1 \geqq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty) \\ x \in (-\infty;-3) \cup (-3;+\infty) \end{array} \right. ,$$

откъдето $x \in (-\infty;-3) \cup (-3;-1] \cup [1;+\infty)$.

б) Множеството от допустими стойности на $y=\dfrac{\sqrt{4x-x^2+5}}{\log_2(x^2-5x+6)}$ се определя от системата

$$\left|\begin{array}{l} 4x-x^2+5\geqq 0 \\ x^2-5x+6>0 \\ \log_2(x^2-5x+6)\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x\in[-1;5] \\ x\in(-\infty;2)\cup(3;+\infty) \\ x\neq\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.,$$

откъдето $x\in\left[-1;\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2};2\right)\cup\left(3;\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2};5\right]$.

! Дефиниционното множество е подмножество на множеството от допустимите стойности на аргумента на функцията. По-нататък ще считаме, че те съвпадат, ако не е казано нещо друго.

Задачи

1. Определете дефиниционното множество на функцията:

а) $y=\sqrt[6]{x^2-5x+4}$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2-5x+4}}$;

в) $y=\ln\big(x(x^2-5x+4)\big)$; г) $y=\sqrt[3]{5x-x^2-4}$;

д) $y=\dfrac{5}{\sqrt{5x-x^2-4}}$; е) $y=\log_{1-x}(5x-x^2-4)$.

2. Определете множеството от допустими стойности на разликата $f(x)-g(x)$ и на частното на $f(x):g(x)$, ако:

а) $f(x)=3-5x$ и $g(x)=\sqrt{5-x}$; б) $f(x)=\sqrt[3]{x}$ и $g(x)=\sqrt{x}$;

в) $f(x)=\sqrt{4-x}$ и $g(x)=\log_5(x^2-4)$; г) $f(x)=5^{\frac{x}{x+2}}$ и $g(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$.

3. Определете множеството от допустими стойности на функцията:

а) $y=\sqrt{3x-x^2-2}$; б) $y=\sqrt{x-8}+\sqrt{8-x}$; в) $y=\log_x 3$;

г) $y=\log_3(3-x)$; д) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}}{x}$; е) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x+5}}{x^2+5x+6}$;

ж) $y=\dfrac{x^2+5x+6}{\sqrt[3]{x+5}}$; з) $y=\dfrac{\sin x}{\lg(x^2-4)}$; и) $y=\dfrac{3^x}{\sqrt{-x}+\sqrt{x}}$.

4. Определете множеството от допустими стойности на функцията:

а) $y=\lg(x^2-3x+2)$; б) $y=\lg|x^2-3x+2|$;

в) $y=\log_{x-2}|x^2-3x+2|$; г) $y=\log_{|x|}5+\sqrt{1-x^2}$;

д) $y=\sqrt[4]{|x|-x}+\lg(x+1)$; е) $y=\dfrac{\lg(x+1)}{\sqrt{|x|-x}}$.