Иван Тонов
Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов

Математика

профилирана подготовка

ГЕОМЕТРИЯ

11. клас

РЕГАЛИЯ 6

Използвани означения:

! обърнете внимание

исторически бележки

алгоритъм при решаване на някои задачи

* ———
——— * незадължителен текст с повишена трудност

© Иван Тонов, Ирина Шаркова, Мария Христова,
Донка Капралова, Веселин Златилов, автори, 2020 г.

© Красимира Коцева, графичен дизайн, 2020 г.

© Николай Цачев, корица, 2020 г.

© „Регалия 6“, издателство, 2020 г.

ISBN 978-954-745-330-2

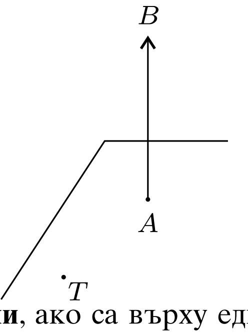
СЪДЪРЖАНИЕ

ТЕМА 1

ВЕКТОРИ

1 НАСОЧЕНИ ОТСЕЧКИ И ВЕКТОРИ В РАВНИНАТА И В ПРОСТРАНСТВОТО

В 8. клас се запознахме с понятията **насочена отсечка** и **вектор** в равнината. Сега ще добавим, че всичко казано за тях остава вярно и в пространството.



Отсечка с начало A и край B наричаме **насочена отсечка** и я означаваме с $\overrightarrow{AB}$, а насочена отсечка от вида $\overrightarrow{TT}$ наричаме **нулева** и я означаваме с $\vec{0}$. Всяка ненулева насочена отсечка има определена посока (от началото към края), докато нулевите насочени отсечки нямат посока.

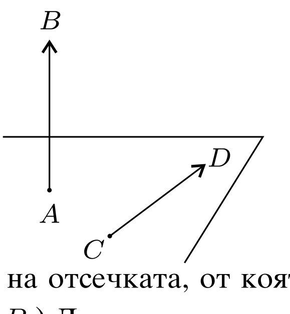
Две ненулеви насочени отсечки са **колинеарни**, ако са върху една права или върху успоредни прави. Колинеарните насочени отсечки са **еднопосочни**, или **противопосочни**. (Записваме съответно $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{PQ}$ или $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{PQ}$.)

Две насочени отсечки са **разнопосочни**, ако не са колинеарни.

Определение

Ако ненулеви насочени отсечки са в една равнина, се казва, че са **компланарни**. Векторите с представители тези насочени отсечки също се наричат компланарни.

Например колинеарните насочени отсечки винаги са компланарни, докато насочените отсечки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ на фигурата не са компланарни.



Дължина на насочена отсечка е дължината на отсечката, от която тя е получена. (Означаваме я с $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, т.е. $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.) Дължината на нулевата насочена отсечка е 0. Единичната насочена отсечка има дължина 1 мерна единица.

Ненулеви насочени отсечки са **равни**, ако са еднопосочни и дължините им са равни. Всички нулеви насочени отсечки са равни (без да имат определена посока).

Две ненулеви насочени отсечки са **противоположни**, ако имат равни дължини и са противопосочни. (За противоположните $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ записваме $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.)

Вектор е множество от всички равни помежду си насочени отсечки. (Означенията за вектори са $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{0}$ и т.н.) **Представител на вектора** е всяка насочена отсечка от него. (Ако $\overrightarrow{AB}$ е представител на вектора $\vec{a}$, пишем $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$.)

Дължина на вектора е дължината на негов представител. (Използваме означенията $|\vec{a}|$, $\left|\vec{b}\right|$, $\left|\vec{0}\right|$ и т.н.) Векторът е единичен, ако представителят му е единична насочена отсечка.

Равенството на два вектора означава, че те са само различни означения на един и същ вектор, т.е. напълно съвпадат. Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са **противоположни**, ако представителите им са противоположни насочени отсечки. (Записваме $\vec{a} = -\vec{b}$.) Векторите са **разнопосочни**, ако представителите им са разнопосочни.

Една насочена отсечка е напълно определена, ако са известни началото, посоката и дължината ѝ (или началото и краят ѝ). Един вектор е напълно определен, ако са известни посоката и дължината му (т.е. посоката и дължината на неговите представители).

!

> Насочената отсечка е конкретна геометрична фигура, докато **векторът** е множество от равни (еднакви) насочени отсечки, всяка от които може да се разглежда като образ на коя да е друга насочена отсечка от вектора при транслация.

Сборът на насочени отсечки е насочена отсечка, докато сборът на вектори е вектор. (Използваме записа $\vec{a} + \vec{b}$.)

Събирането на две насочени отсечки (на два вектора) може да извършваме по две различни правила, водещи до един и същ резултат. Те са:

Правилото на триъгълника, според което $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

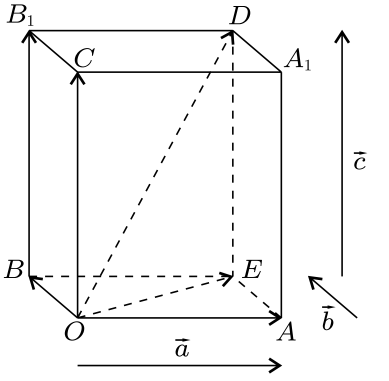
Правилото на успоредника, според което, ако $ABCD$ е успоредник, то $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Сборът на неколинеарни насочени отсечки не зависи от избраното правило. В успоредника $ABCD$ е вярно, че $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, т.е.
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

При събирането на насочени отсечки е вярно равенството
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$, известно като **тъждество на Шал**.

Правилото на успоредника показва, че известното ни **разместително** свойство е в сила и за събирането на насочени отсечки и на вектори, т.е. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

Тъждеството на Шал показва верността на **съдружителното** свойство при събирането на насочени отсечки и на вектори, т.е. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.



За събирането на три некомпланарни вектора може да се използва така нареченото **правило на паралелепипеда**. Според него, ако паралелепипедът $OAEBCA_1DB_1$ е такъв, че $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$, то $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{OD}$.

За **изваждане** на две насочени отсечки (на два вектора) използваме, че $-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$ и заместваме изваждането със събиране.

Ако умаляемото и умалителят са насочени отсечки с общо начало, получаваме следното правило за изваждане на две насочени отсечки:

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$.

Сборът на векторите $\vec{a}$ и $-\vec{b}$ наричаме разлика на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (записваме $\vec{a}-\vec{b}$).

При умножаване на нулева насочена отсечка (нулевия вектор) с произволно число k отново получаваме нулева насочена отсечка (нулевия вектор), т.е. $k.\vec{0}=\vec{0}$.

При умножаване на ненулева насочена отсечка $\overrightarrow{AB}$ (вектор с представител $\overrightarrow{AB}$) с число k получаваме насочена отсечка $\overrightarrow{AP}$ (записваме $\overrightarrow{AP}=k.\overrightarrow{AB}$), като:

при $k=0 \Rightarrow \overrightarrow{AP}=\vec{0}$;

при $k>0 \Rightarrow \overrightarrow{AP}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AB}$ и $AP=k.AB$;

при $k<0 \Rightarrow \overrightarrow{AP}\uparrow\downarrow\overrightarrow{AB}$ и $AP=|k|.AB$.

Следователно, ако $\overrightarrow{AP}=k.\overrightarrow{AB}$ и тези две насочени отсечки са ненулеви, то те са колинеарни, т.е. правите AP и AB съвпадат (т.к. имат обща точка).

Действията събиране и изваждане на вектори и умножение на вектор с число притежават свойства, подобни на действията с числа:

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}, \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}, \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}, \left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right),$

$1.\vec{a}=\vec{a}, 0.\vec{a}=\vec{0}, -1.\vec{a}=-\vec{a}, (k.p).\vec{a}=k.(p.\vec{a})=p.(k.\vec{a}),$

$(k+p).\vec{a}=k.\vec{a}+p.\vec{a}, k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k.\vec{a}+k.\vec{b}, |k.\vec{a}|=|k|.|\vec{a}|.$

Действие **деление** на насочена отсечка (вектор) с число **не е дефинирано**. Вместо да делим насочената отсечка (вектора) с число, може да я (го) умножим с реципрочното на даденото число.

Задачи

1. Може ли разнопосочни насочени отсечки да са компланарни?

2. Посочете за дадения на фигурата правоъгълен паралелепипед примери за:

а) еднопосочни вектори;

б) противопосочни вектори;

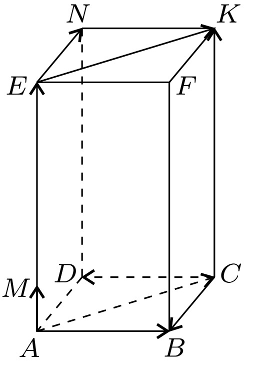
в) разнопосочни вектори;

г) колинеарни вектори;

д) компланарни вектори;

е) некомпланарни вектори;

ж) некомпланарни насочени отсечки.



3. На дадения на фигурата паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точките M и K са съответно среди на ръбовете B_1C_1 и A_1D_1. Посочете:

а) всички групи равни насочени отсечки;

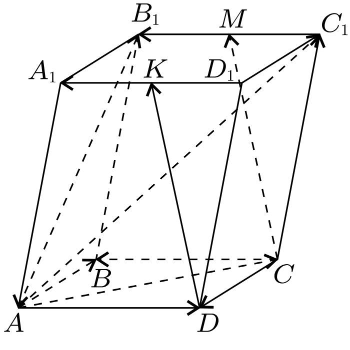
б) всички двойки противоположни насочени отсечки;

в) всички групи компланарни насочени отсечки;

г) всички двойки некомпланарни насочени отсечки;

д) представители на вектори, с начало и край във върховете на паралелепипеда, които да са равни съответно на сумата на векторите

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1D_1}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{C_1C}$.



4. На фигурата е даден правилен тетраедър $ABCD$, в който M, N, P и Q са средите на ръбовете му.

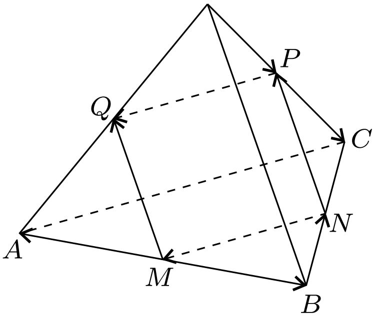
а) Посочете всички изобразени:

– двойки равни насочени отсечки;

– двойки противоположни насочени отсечки;

– групи компланарни насочени отсечки.

б) Определете вида на четириъгълника $MNPQ$.



5. Верни ли са дадените твърдения?

а) Два вектора, колинеарни с ненулев вектор, са колинеарни.

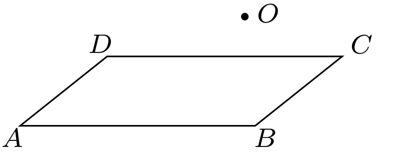
б) Два вектора, еднопосочни с ненулев вектор, са еднопосочни.

в) Два вектора, противопосочни на ненулев вектор, са еднопосочни.

г) Два вектора, колинеарни с ненулев вектор, са еднопосочни.

д) Две насочени отсечки, поотделно компланарни с дадена насочена отсечка, са компланарни.

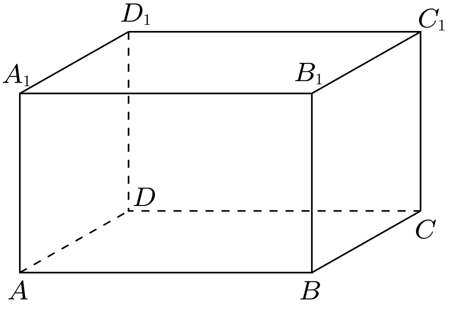
6. Даден е успоредник $ABCD$ и произволна точка O в пространството. Докажете, че:



а) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$;

б) $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$.

7. Даден е правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Докажете, че:



а) $\left|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CC_1}\right| = \left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CC_1}\right|$;

б) $\left|\overrightarrow{A_1B_1} - \overrightarrow{DB_1}\right| = \left|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1}\right|$;

в) $\left|\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{C_1B}\right| = \left|\overrightarrow{A_1D} - \overrightarrow{BD}\right|$.

8. Даден е паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и произволна точка O в пространството. Докажете, че $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_1}$.

9. Дадена е четириъгълна пирамида с връх P и основа $ABCD$, която е трапец. Точката O е средата на средната основа на трапеца. Докажете, че $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO}$.

10. Диагоналите на куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ се пресичат в точка O. Намерете числото k, за което:

а) $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC_1} = k.\overrightarrow{AO}$; в) $\overrightarrow{OB_1} = k.\overrightarrow{B_1D}$.

Упътване: Използвайте, че диагоналите на паралелепипеда се разполовяват от пресечната си точка.

11. За три точки A, B и M е изпълнено условието $\overrightarrow{AM} = k.\overrightarrow{MB}$, където $k \neq -1$. Докажете, че тези точки принадлежат на една права и за произволна точка O от пространството е вярно равенството $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + k.\overrightarrow{OB}}{1+k}$.

12. Докажете, че ако $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, то $|\vec{p}| \leqq |\vec{a}| + \left|\vec{b}\right| + |\vec{c}|$.

2 ЛИНЕЙНА ЗАВИСИМОСТ И НЕЗАВИСИМОСТ НА ВЕКТОРИ В РАВНИНАТА И В ПРОСТРАНСТВОТО

Както вече припомнихме, ако $\overrightarrow{AP} = k.\overrightarrow{AB}$ и тези две насочени отсечки са ненулеви, те са колинеарни. Следователно са колинеарни и векторите с представители тези насочени отсечки. Вярно е и обратното твърдение.

Теорема 1

Ако ненулевите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни, съществува такова число k, че $\vec{b} = k.\vec{a}$.

Доказателство: Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са еднопосочни, еднопосочните им единични вектори съвпадат, т.е. $\frac{1}{|\vec{a}|}.\vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|}.\vec{b}$. Следователно $\vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.\vec{a} = k.\vec{a}$, при $k = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са противопосочни, еднопосочните им единични вектори са противоположни, т.е. $-\frac{1}{|\vec{a}|}.\vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|}.\vec{b}$. Следователно $\vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}.\vec{a} = k.\vec{a}$, при $k = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$.

Задача 1. Нека за числата k и m и неколинеарните вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ е изпълнено равенството $k.\vec{a} + m.\vec{b} = \vec{0}$. Докажете, че $k = m = 0$.

Доказателство: От $k.\vec{a} + m.\vec{b} = \vec{0}$ получаваме $m\vec{b} = -k.\vec{a}$. Ако $m \neq 0$, получаваме $\vec{b} = -\frac{k}{m}.\vec{a}$. Следователно $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни вектори, което противоречи на условието. Аналогично стигаме до противоречие и при $k \neq 0$. Следователно е вярно, че $k = m = 0$.

Определение 1

Ако за векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ съществуват ненулеви числа k и m, за които $k.\vec{a} + m.\vec{b} = \vec{0}$, казваме, че $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са **линейно зависими**. Ако $k.\vec{a} + m.\vec{b} = \vec{0}$ е вярно само при $k = m = 0$, казваме, че $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са **линейно независими**.

Следствие

Колинеарните двойки вектори са линейно зависими, а неколинеарните двойки вектори са линейно независими.

Теорема 2

Ако векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не са колинеарни, то векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни тогава и само тогава, когато съществуват числа p и q, за които $\vec{c} = p.\vec{a} + q.\vec{b}$.

Доказателство: Нека векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни.

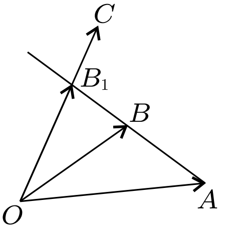
Ако векторът $\vec{c}$ е колинеарен с някой от векторите $\vec{a}$ или $\vec{b}$, твърдението следва от теорема 1. (Едно от числата p или q ще бъде означеното с k число от теорема 1, а другото ще е 0.)

Ако векторът $\vec{c}$ не е колинеарен с никой от векторите $\vec{a}$ или $\vec{b}$, нека $\overrightarrow{OC}$ е негов представител. Да построим $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, съответни представители на $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Трите насочени отсечки задават три прави, пресичащи се по двойки (тъй като са в една равнина).

Нека правата AB да пресича правата OC в точка B_1. Тъй като $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AB_1}$ са колинеарни, то $\overrightarrow{AB_1} = m.\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{OA} + m.\overrightarrow{AB}$. От колинеарността на $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OB_1}$ следва, че $\overrightarrow{OC} = p.\overrightarrow{OB_1} = p.\overrightarrow{OA} + p.m.\overrightarrow{AB} = p.\overrightarrow{OA} + q.\overrightarrow{AB}$, където $q = p.m$.

Следователно съществуват такива числа p и q, че $\vec{c} = p.\vec{a} + q.\vec{b}$.

Нека съществуват числа p и q, за които $\vec{c} = p.\vec{a} + q.\vec{b}$. Тогава съществуват и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OC}$ – съответни представители на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, за които $\overrightarrow{OC} = p.\overrightarrow{OA} + q.\overrightarrow{AB}$.



Следователно $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OC}$ са в една равнина, т.е. векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни.

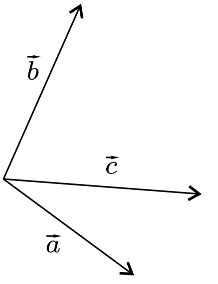
Задача 2. Нека за числата p, q и t и некомпланарните вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ е изпълнено равенството $p.\vec{a} + q.\vec{b} + t.\vec{c} = \vec{0}$. Докажете, че $p = q = t = 0$.

Доказателство: Тъй като векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не са компланарни, то никои два от тях не са колинеарни. От $p.\vec{a} + q.\vec{b} + t.\vec{c} = \vec{0}$ получаваме $t.\vec{c} = -p.\vec{a} - q.\vec{b}$.

Ако $t \neq 0$, получаваме $\vec{c} = -\frac{p}{t}.\vec{a} - \frac{q}{t}.\vec{b}$. Тогава $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са компланарни вектори, което противоречи на условието.

Аналогично стигаме до противоречие при $p \neq 0$ и $q \neq 0$.

Следователно получаваме, че $p = q = t = 0$.



Определение 2

Ако за векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ съществуват ненулеви числа p, q и t, за които $p.\vec{a} + q.\vec{b} + t.\vec{c} = \vec{0}$, казваме, че $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са **линейно зависими**. Ако $p.\vec{a} + q.\vec{b} + t.\vec{c} = \vec{0}$ е вярно само при $p = q = t = 0$, казваме, че $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са **линейно независими** в пространството.

Следствие

Компланарните тройки вектори са линейно зависими, а некомпланарните тройки вектори са линейно независими.

Теорема 3

Ако векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ не са компланарни, то за всеки вектор $\vec{d}$ съществуват числа p, q и t, за които $\vec{d} = p.\vec{a} + q.\vec{b} + t.\vec{c}$.

Доказателство: Твърдението е очевидно в случаите, когато $\vec{d}$ е компланарен с някои два от векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (в частност – колинеарен с някой от тях).

Нека $\vec{d}$ не е компланарен с никои два от векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Нека $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ са съответни представители на $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. Тъй като никои три от векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ не са компланарни, равнините OAB и OCD са различни. Те имат обща точка и следователно се пресичат. Нека правата OS е тяхната пресечница, а $\overrightarrow{OS}$ е насочена отсечка, колинеарна с пресечницата.

Тъй като $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OS}$ са компланарни, съществуват числа a и b, за които $\overrightarrow{OS} = a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB}$.

Тъй като $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OS}$ също са компланарни, съществуват числа c и s, за които $\overrightarrow{OD} = c.\overrightarrow{OC} + s.\overrightarrow{OS} = c.\overrightarrow{OC} + s.\left(a.\overrightarrow{OA} + b.\overrightarrow{OB}\right)$.

Следователно $\vec{d} = p.\vec{a} + q.\vec{b} + t.\vec{c}$, където $p = s.a$, $q = s.b$ и $t = c$.

Следствие

Всеки четири вектора са линейно зависими.

Задачи

1. Верни ли са дадените твърдения?

а) Колинеарните вектори са линейно зависими.

б) Неколинеарните вектори са линейно независими.

в) Компланарните вектори са линейно зависими.

г) Три компланарни вектора са линейно зависими.

д) Три вектора, сред които два са линейно зависими, са компланарни.

е) Три некомпланарни вектора са линейно зависими.

ж) Всеки четири вектора са линейно зависими

2. Двойката вектори $\vec{a}$ и $\vec{c}$ и двойката вектори $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са колинеарни. Докажете, че са линейно зависими векторите:

а) $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{c}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{c}$; в) $\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{c}$; г) $-\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{c}$.

3. Векторите $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ са линейно зависими. Докажете, че векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са колинеарни.

4. Докажете, че ако векторите $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ не са колинеарни, то не са колинеарни и двойките вектори:

а) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; б) $\vec{a}+2\vec{b}$ и $2\vec{a}-\vec{b}$.

5. Даден е паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Кои от дадените тройки вектори са линейно зависими:

а) $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$; б) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$;

в) $\overrightarrow{B_1B}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DD_1}$; г) $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$?

6. Точките E и F са среди на ръбовете AC и BD на тетраедъра $ABCD$. Докажете, че $2\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$. Компланарни ли са векторите $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{DC}$?

7. Дадени са успоредниците $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Докажете, че $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ са линейно зависими.

8. Даден е тетраедър $ABCD$, в който K и M са средите на ръбовете му AB и CD. Докажете, че средите на отсечките KC, KD, MA и MB са върхове на успоредник.

ТЕМА 2

АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

12 УРАВНЕНИЕ НА ПРАВА

Всяко уравнение, свързващо две променливи x и y, има прост геометричен смисъл, ако числата x и y се разглеждат като координати на точки в равнината. На едно уравнение могат да отговарят безброй много двойки стойности, които го удовлетворяват, а на всяка такава двойка стойности отговаря точка от равнината. Съвкупността от тези точки (най-общо казано) определя някаква линия в равнината.

Както вече научихме в 9. клас,

• графиката на линейната функция $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ е права линия, която не е успоредна на ординатната ос;

• всяка права линия, която не е успоредна на ординатната ос, е графика на линейна функция, т.е. функция от вида $y = ax + b$ $(a \neq 0)$.

В този урок ще изясним с какво уравнение се задава произволна права в равнината.

Теорема 1

Всяка права p в равнината се задава с уравнение от вида $ax+by+c = 0$, където a, b и c са реални числа, като a и b не са едновременно равни на нула и са координати на вектор, перпендикулярен на правата p.

Доказателство: Нека в равнината е дадена права p. Избираме точка $P_0(x_0; y_0) \in p$ и вектор $\vec{n}(a; b)$, който е перпендикулярен на правата p. Изборът на $\vec{n}(a; b)$ означава, че a и b не са едновременно равни на нула.

Следователно произволна точка $P(x; y) \in p$ тогава и само тогава, когато $\overrightarrow{P_0P} \perp \vec{n}$, т.е. $\overrightarrow{P_0P}.\vec{n} = 0$. Тъй като $\overrightarrow{P_0P}(x - x_0; y - y_0)$ и $\vec{n}(a; b)$, то $\overrightarrow{P_0P}.\vec{n} = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$, т.е. $ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$. Ако $c = -(ax_0 + by_0)$, получаваме, че $P(x; y) \in p$ тогава и само тогава, когато координатите $(x; y)$ удовлетворяват уравнението $ax + by + c = 0$.

Определение 1

Уравнението $ax + by + c = 0$ се нарича **общо уравнение** на правата p.

Забележка: Оттук нататък за краткост ще казваме „правата $ax+by+c=0$".

Определение 2

Ако векторът $\vec{n}(a;b)$ има $|\vec{n}| = 1$, той се нарича **нормален вектор** на правата $ax + by + c = 0$.

Векторът $\vec{n}(a;b)$ беше избран произволно по направление, перпендикулярно на правата. Това означава, че всяка права притежава безброй общи уравнения със съответно пропорционални коефициенти.

Всяка права $ax + by + c = 0$ има два взаимно противоположни нормални вектора с координати $\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\pm\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

Задача 1. Да се намери общо уравнение на правата, минаваща през точките $(1;-2)$ и $(5;4)$.

Решение:

Търсим уравнение от вида $ax + by + c = 0$, което се удовлетворява от наредените двойки $(1;-2)$ и $(5;4)$. Като заместим числата от първата двойка в търсеното уравнение, получаваме $a - 2b + c = 0$ и по същия начин от втората двойка числа получаваме $5a + 4b + c = 0$. Разполагаме с две равенства, а търсим три числа – обяснението на този факт е в забележката, която направихме непосредствено след определение 2. Да изразим a и b чрез c. От първото равенство имаме $a = 2b - c$, след заместване във второто равенство и опростяване достигаме до $b = \frac{2}{7}c$. Тогава $a = 2b - c = \frac{4}{7}c - c = -\frac{3}{7}c$. Дотук получихме, че търсеното уравнение ще има вида $-\frac{3}{7}cx + \frac{2}{7}cy + c = 0$. Ако обаче $c = 0$, то би следвало, че $a = b = 0$, което е невъзможно съгласно определението за уравнение на права. Това означава, че съкращаването на c в равенството $-\frac{3}{7}cx + \frac{2}{7}cy + c = 0$ е възможно и след това съкращаване намираме търсеното общо уравнение, а именно $-\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}y + 1 = 0$. Ако с това уравнение е необходимо да продължим решаването на някаква задача, то препоръчително е да го умножим например с (-7), за да го получим във вида $3x - 2y - 7 = 0$.

Да разгледаме някои частни случаи на уравнението $ax + by + c = 0$:

• Ако $c = 0$.

Тогава уравнението ще има вида $ax + by = 0$ и директната проверка показва, че координатите на началото на координатната система го удовлетворяват. Следователно права с общо уравнение $ax + by = 0$ минава през началото $O(0; 0)$ на координатната система.

• Ако $a = 0$.

Да напомним, че тогава $b \neq 0$ и уравнението ще има вида $by + c = 0$, което можем още да запишем във вида $y = -\frac{c}{b}$. Това равенство показва, че всички точки от правата с разглежданото общо уравнение имат една и съща ордината, което означава, че тази права е успоредна на абсцисната ос Ox. Получихме, че правата с общо уравнение $by + c = 0$ е успоредна (или съвпада, ако и $c = 0$) с абсцисната ос.

• Ако $b = 0$.

В този случай уравнението ще има вида $ax + c = 0$ и както в предния случай се убеждаваме, че правата с общо уравнение $ax + c = 0$ е успоредна или съвпада с ординатната ос Oy.

В най-различни ситуации ще е необходимо да съставим уравнение на права, минаваща през две дадени точки. Ето защо е наложително да обобщим задача 1.

Нека $M(x_1; y_1)$ и $N(x_2; y_2)$ са две дадени точки в равнината. Търсим уравнение на правата MN. За числата x_1, x_2 и y_1, y_2 са възможни точно три различни случая:

• Ако $x_1 = x_2$. Тогава е ясно, че $y_1 \neq y_2$. Но в този случай, съгласно предишните разсъждения, правата MN ще бъде успоредна на оста Oy и едно нейно уравнение ще бъде уравнението $x - x_1 = 0$.

• Ако $y_1 = y_2$. Също както в предишния случай се убеждаваме, че едно уравнение на правата MN ще бъде уравнението $y - y_1 = 0$.

• Ако $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$. Нека $P(x; y)$ е произволна точка от правата MN, различна от M и N. Тогава $\overrightarrow{MP}(x - x_1; y - y_1)$ и $\overrightarrow{MN}(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Понеже точките M, N, P лежат на една права, то векторите $\overrightarrow{MP}$ и $\overrightarrow{MN}$ са колинеарни, т.е. изпълнено е равенството $\overrightarrow{MP} = k\overrightarrow{MN}$ за някакво реално число k. От последното равенство следват равенствата $x - x_1 = k(x_2 - x_1)$ и $y - y_1 = k(y_2 - y_1)$. Като изразим k от двете равенства, получаваме $k = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$. Ето защо търсеното уравнение на правата MN ще има вида $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Следва обаче да си зададем въпроса дали наистина полученото уравнение е уравнение на права? Внимателният оглед на уравнението показва, че то е от вида $ax + by + c = 0$, като в него $a = \frac{1}{x_2 - x_1}, b = \frac{1}{y_1 - y_2}$ и $c = \frac{x_1}{x_1 - x_2} + \frac{y_1}{y_2 - y_1}$.

Определение 3

Уравнение от вида $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ се нарича уравнение на права, минаваща през точките $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$.

Тъй като в аналитичната геометрия разнообразието на задачите е твърде голямо, то е добре да познаваме сравнително голям брой различни видове уравнения на права.

Ако например правата $ax+by+c=0$ не е успоредна на ординатната ос Oy, то $b\neq 0$ и като изразим y от последното уравнение, получаваме $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$. Означавайки $k=-\dfrac{a}{b}, n=-\dfrac{c}{b}$, се убеждаваме, че всяка права, която не е успоредна на абсцисната ос, има уравнение от вида $y=kx+n$.

Определение 4

Уравнение на права от вида $y=kx+n$ се нарича **декартово уравнение** на правата.

Числото k се нарича **ъглов коефициент на правата** $y=kx+n$ за $k=\operatorname{tg}\alpha$, където α е ъгълът, който тази права сключва с положителната посока на абсцисната ос Ox.

Когато права l има уравнение $ax+by+c=0$, е прието да се използва записът: $l: ax+by+c=0$.

От казаното по-горе следва, че декартовото уравнение на правата с ъглов коефициент k, минаваща през точката $P(x_0;y_0)$, може да се запише във вида $y=k(x-x_0)+y_0$, а на правата, минаваща през две различни точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ – във вида $y=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$.

Задача 2. Дадени са две различни точки $M(x_1;y_1)$ и $N(x_2;y_2)$. Напишете уравнението на симетралата на отсечката MN.

Решение:

Симетралата на отсечката MN е геометричното място на точките, които се намират на равни разстояния от $M\,(x_1;y_1)$ и $N\,(x_2;y_2)$. Нека точката $P\,(x;y)$ е такава, че $PM=PN$. Равенството $PM=PN$ можем да запишем във вида $\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$, от което, след повдигане на квадрат, получаваме еквивалентното му равенство
$x^2-2xx_1+x_1^2+y^2-2yy_1+y_1^2=x^2-2xx_2+x_2^2+y^2-2yy_2+y_2^2$. След понататъшно опростяване полученото равенство можем да запишем още във вида $2\,(x_2-x_1)\,x+2\,(y_2-y_1)\,y+x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2=0$.

Задачи

1. Напишете уравненията на координатните оси.

2. Напишете нормалните вектори на правата $x - 2y + 1 = 0$.

3. Проверете кои от дадените точки $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{2}{3}; 0\right)$, $C(2;2)$, $D\left(\frac{2}{3}; 1\right)$, $E(6;5)$ лежат върху правата $l : 3x - 4y + 2 = 0$.

4. Напишете декартовите уравнения на правите, които минават през началото на правоъгълната координатна система и имат ъглов коефициент:
а) $k = 1$; б) $k = 2$; в) $k = \frac{1}{2}$; г) $k = -1$; д) $k = -2$; е) $k = -\frac{1}{2}$.
Начертайте правите в една координатна система.

5. Намерете ъгловия коефициент на правата:
а) $4x - 3y + 2 = 0$; б) $x + 2y - 5 = 0$.

6. Напишете общото уравнение на правата с нормален вектор $\vec{n}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, която минава през точката $P_0(1;2)$.

7. Напишете общото уравнение на правата, която минава през точките $A(1;0)$ и $B(0;1)$.

8. Напишете общото уравнение на правата, която минава през точките $A(3;-1)$ и $B(4;1)$. Напишете нормалните вектори на тази права.

9. В координатна система са дадени точките $A\left(0; -\frac{1}{2}\right)$ и $B\,(3;7)$. Намерете общото уравнение на правата AB и ъгловия коефициент на AB.

10. В координатна система са дадени точките $A\,(-3;1)$ и $B\,(4;2)$. Намерете общото уравнение на симетралата на отсечката AB.

13 УРАВНЕНИЕ НА ПРАВА. УПРАЖНЕНИЕ

Ще разгледаме някои приложения на уравненията на права.

Задача 1. Дадена е права p с уравнение $ax + by + c = 0$ и произволна точка $M(x_0; y_0)$. Да се докаже, че разстоянието d от точката M до правата p може да се намери по формулата $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Решение:

Ако $M \in p$, то $ax_0 + by_0 + c = 0$ и $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$. Ако $M \notin p$, т.к.

ТЕМА 3

СТЕРЕОМЕТРИЯ

22 ПЪРВИЧНИ ПОНЯТИЯ И АКСИОМИ В СТЕРЕОМЕТРИЯТА

От наученото в 10. клас вече знаем, че основни първични понятия в стереометрията са точка, права и равнина. Знаем, че и правата и равнината се разглеждат като множества от точки.

Пространството се състои от всички точки, прави и равнини.

Да припомним, че за означаване на точки използваме големи букви от латинската азбука – A, B, C и други. За означаване на прави използваме малки букви от латинската азбука – a, b, c, d и т.н. За означаване на равнини използваме малки букви от гръцката азбука – $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ и т.н.

За аксиоми в стереометрията се приемат следните твърдения:

Аксиома 1

За всяка равнина съществуват безброй много точки, които ѝ принадлежат и безброй много точки, които не ѝ принадлежат.

Аксиома 2

За всеки три точки в пространството, които не лежат на една права, съществува точно една равнина, която ги съдържа.

Аксиома 3

Ако две различни точки от една права лежат в една равнина, то всяка точка от правата лежи в равнината.

Аксиома 4

Ако две различни равнини имат една обща точка, то множеството от общите им точки е права.

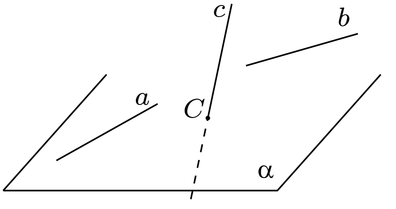
Аксиома 5

Всички аксиоми и теореми на планиметрията са изпълнени във всяка равнина на пространството.

Първите важни следствия от аксиомите са теоремите, които определят взаимното положение на точките, правите и равнините в пространството.

Критерий за взаимното положение на права и равнина е броят на общите им точки.

Според Аксиома 3 може да имаме 3 възможности:

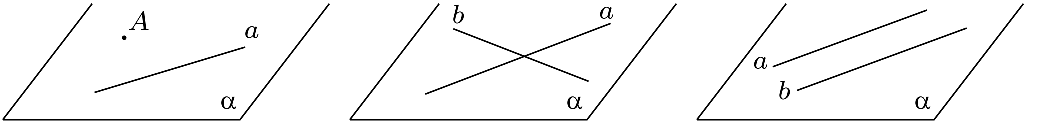


2 общи точки – $a \in \alpha$;

1 обща точка ($c \cap \alpha = C$) – c пробожда α в точка C;

0 общи точки ($b \cap \alpha = 0$) – правата и равнината са успоредни $b \| \alpha$.

Отговор на въпроса кога точки и прави са от една равнина дават следните чертежи:



Теорема 1

През права и точка, нележаща на нея, минава точно една равнина.

Теорема 2

През две пресичащи се прави минава точно една равнина.

Теорема 3

През две успоредни прави минава единствена равнина.

Критерий за взаимното положение на две прави е не само общият им брой точки, но и дали лежат в една равнина или не.

Следователно за две различни прави е изпълнена точно една от следните възможности:

– имат една обща точка (пресичащи се) и по теорема 2 те лежат в една равнина;

– нямат обща точка.

Когато две прави нямат обща точка, за тях отново има две възможности:
– съществува равнина, в която лежат и двете прави – **успоредни са**;
– не съществува равнина, в която лежат – **кръстосани са**.
За успоредни прави в пространството са в сила следните теореми:

Теорема 4

През точка, която не лежи на дадена права, съществува в пространството единствена права, успоредна на дадената.

Теорема 5

Ако две прави са успоредни, то всяка равнина, която пресича едната от тях, пресича и другата.

Теорема 6

Две различни прави в пространството, поотделно успоредни на трета, са успоредни помежду си.

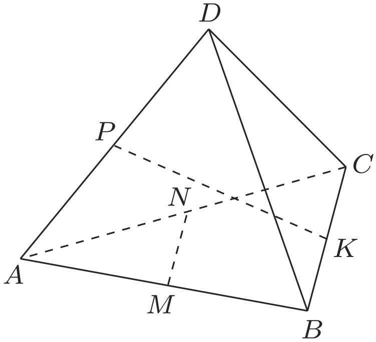
Задача 1. Дадени са две прави, които имат само една обща точка. Да се докаже, че правите, които ги пресичат в две различни точки, лежат в една равнина.

Решение:

Нека правите са a и b. Те са пресичащи се и следователно по теорема 2 определят единствена равнина α, в която лежат. Да разгледаме произволна права c и нека $a \cap c = A$, $b \cap c = B$, като $A \neq B$, следователно две точки от правата c лежат в α и по аксиома 3. правата c лежи в α. Следователно всички прави, които пресичат правите a и b в две различни точки, лежат в равнината, определена от тях.

Задача 2. Даден е правилен тетраедър $ABCD$, точките M, N, K и P са среди съответно на ръбовете AB, AC, BC и AD. Да се определи взаимното положение на правите MN и KP.

Решение:



Да разгледаме $\triangle ABC$, в който MN е средна отсечка и следователно $MN \| BC$ и $MN \in (A, B, C)$. Точка $K \in BC$, но $K \notin MN$ и също е от равнината (A, B, C), а точка $P \notin (A, B, C)$, защото лежи на ръба AD, следователно K е прободът на правата PK с (A, B, C). Правите MN и KP не лежат в една равнина и следователно са кръстосани.

Задача 3. Дадени са равнина α и точките A, B, C и D, които не лежат в нея. Равнината α пресича отсечките AB и CD, но не пресича отсечката BC. Вярно ли е, че α не пресича и отсечката AD?

Решение:

По условие $AB \cap \alpha$. Следователно точките A и B са в различни полупространства относно равнината. Правата $CD \cap \alpha$. Тогава точките C и D също са в различни полупространства. По условие отсечката BC не пресича α, следователно точките B и C са в едно полупространство и тогава A и D са в другото полупространство.

Ако допуснем, че отсечката $AD \cap \alpha$, то следва, че точките A и D са в различни полупространства относно α, което е в противоречие с доказаното.

Задачи

1. Могат ли права и равнина да имат точно три общи точки?

2. Могат ли две равнини да имат точно: една обща точка, точно три общи точки?

3. Колко различни равнини минават: през 1 точка; през 3 точки; през 5 точки?

4. Две точки от дадена окръжност лежат в равнина α. Вярно ли е, че окръжността лежи в равнината α.

5. Колко равнини минават през 9 точки, ако:

а) никои 4 от тях не са в една равнина;

б) 4 са в една равнина, а други 5 в друга и никои 3 не са на една права?

6. Дадени са две кръстосани прави и точка, която не лежи на тях. Докажете, че през точката съществува най-много една права, която пресича и двете прави.

7. Ако права a е кръстосана с права b и правата b е кръстосана с права c, то вярно ли е, че правата a и правата c са кръстосани?

8. Ако права a е кръстосана с права b и правата b е успоредна с права c, то вярно ли е, че правата a и правата c са кръстосани?

9. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основа $ABCD$ и връх M. Точките K, P и N са съответно среди на ръбовете AM, DM и BM. Определете взаимното положение на двойките прави: KP и BC, KP и CM, PN и CM, PN и AB.

10*. Дадена е правилна четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Върху околните ръбове са взети точки, за които $AM : MA_1 = 3 : 1$, $CN : NC_1 = 1 : 3$, а K и P са среди съответно на BB_1 и DD_1. Определете взаимното положение на двойките прави KP и A_1C_1, MN и AC, KP и MN.

23 ПЪРВИЧНИ ПОНЯТИЯ И АКСИОМИ. УПРАЖНЕНИЕ

Когато две прави в пространството не са успоредни, важна и често използвана тяхна характеристика е ъгълът, който те сключват помежду си. Знаем, че:

Определение 1

Нека a и b са кръстосани прави и O е произволна точка. Ако правите a' и b' се пресичат в точка O, като $a \| a'$ и $b \| b'$, то $\sphericalangle(a;b) = \sphericalangle(a';b')$.

Следствие

Два ъгъла в пространството, с взаимно успоредни рамене, са равни или допълващи се до $180°$.

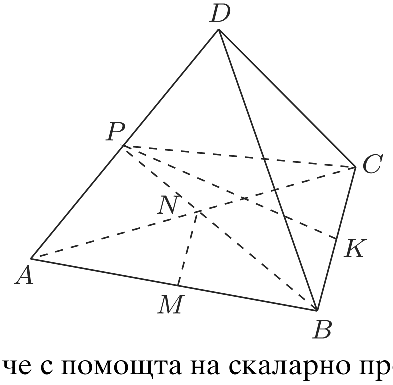
Определение 2

Две прави в пространството се наричат перпендикулярни, ако ъгълът между тях е прав. Записва се $a \perp b$.

Да припомним, че ако две прави в пространството са перпендикулярни, то не е задължително те да се пресичат.

Задача 1. Даден е правилен тетраедър $ABCD$, точките M, N, K и P са среди съответно на ръбовете AB, AC, BC и AD. Да се определи ъгълът между правите MN и KP.

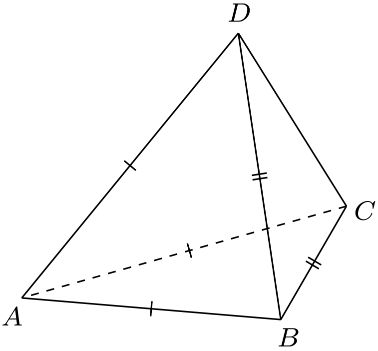
Решение:



В предишния урок доказахме, че правите MN и KP са кръстосани и $MN \| BC$, следователно по определение $\sphericalangle(MN;KP) = \sphericalangle(BC;KP)$. Да разгледаме $\triangle BCP$. Той е равнобедрен, защото $BP = CP$ (медиани в еднакви триъгълници) и следователно медианата му PK е височина в него, а $\sphericalangle(BC;KP) = 90°$.

Според наученото от тема 1, разбрахме че с помощта на скаларно произведение също може да се намират ъгли между прави.

Задача 2. В пространството са дадени четири точки A, B, C и D, като са изпълнени равенствата $AB = AC = AD$ и $BC = BD$. Да се намери мярката на $\sphericalangle(AB; CD)$.

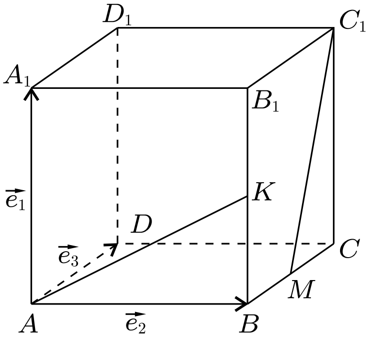


Решение:

От условието следва, че $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ са еднакви и следователно $\sphericalangle(AB; AC) = \sphericalangle(AB; AD) = \alpha$. Пресмятаме скаларното произведение $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2.\cos\alpha - \left|\overrightarrow{AB}\right|^2.\cos\alpha = 0$. Следователно мярката на $\sphericalangle(AB; CD) = 90°$.

Задача 3. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, за който точка K е средата на BB_1, а точка M е средата на BC. Да се намерят ъглите между правите:

а) AK и CD_1; б) AK и C_1M.



Решение:

Да използваме за база ръбовете $\overrightarrow{AA_1} = \vec{e_1}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{e_2}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{e_3}$, като $|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = |\vec{e_3}| = a$ и $\vec{e_2}.\vec{e_1} = \vec{e_3}.\vec{e_2} = \vec{e_1}.\vec{e_3} = 0$.

а) Да изразим скаларното произведение на векторите $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{CD_1}$:

$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{CD_1} = \left(\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_1}\right).(\vec{e_1} - \vec{e_2}) =$

$0 + \frac{1}{2}a^2 - a^2 - 0 = -\frac{1}{2}a^2.$

От друга страна, $\cos\sphericalangle(AK; CD_1) = \dfrac{\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{CD_1}}{\left|\overrightarrow{AK}\right|.\left|\overrightarrow{CD_1}\right|} = \dfrac{-0,5a^2}{\sqrt{\frac{5}{4}a^2}.\sqrt{2a^2}} = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}.$

Следователно косинусът на търсения ъгъл е $0,1\sqrt{10}$.

б) Да изразим скаларното произведение на векторите $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{C_1M}$:

$\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{C_1M} = \left(\vec{e_2} + \frac{1}{2}\vec{e_1}\right).\left(-\vec{e_1} - \frac{1}{2}\vec{e_3}\right) = 0 - \frac{1}{2}a^2 - 0 - 0 = -\frac{1}{2}a^2$ и

$\cos\sphericalangle(AK, C_1M) = \dfrac{\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{C_1M}}{\left|\overrightarrow{AK}\right|.\left|\overrightarrow{C_1M}\right|} = \dfrac{-0,5a^2}{\sqrt{\frac{5}{4}a^2}.\sqrt{\frac{5}{4}a^2}} = -\dfrac{2}{5}$. Следователно косинусът на търсения ъгъл е $0,4$.

Задачи

1. Даден е правилен тетраедър $ABCD$. Върху ръбовете му са взети точки такива, че $M \in BD$ и $BM : MD = 3 : 1$, $N \in AD$ и $AN : ND = 3 : 1$, $P \in BC$ и $BP : PC = 1 : 3$, $K \in CD$ и $CK : KD = 3 : 1$. Намерете мярката на $\sphericalangle(MN; PK)$.

2. Даден е правилен тетраедър $ABCD$. Върху ръбовете му са взети точки $M \in BD$, като $BM : MD = 4 : 1$, $N \in AD$ такава, че $AN : ND = 4 : 1$, $P \in BC$ и $BP : PC = 1 : 3$, $K \in BD$, за която $BK : KD = 1 : 3$. Намерете мярката на $\measuredangle(MN; PK)$.

3. Основата $ABCD$ на пирамида $ABCDM$ е квадрат. За ръбовете е изпълнено $MD \perp AD$ и $MD \perp CD$. Точка P е среда на BD. Намерете мярката на ъгъла между правите MP и AC.

4. Дадена е правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$, в която $\triangle BDM$ е равностранен. Точка P е средата на ръба MD, а точка O е центърът на основата. Намерете $\cos \measuredangle(PO; BC)$.

5. Дадени са точките A, B, C и D, които не лежат в една равнина. Ако $\measuredangle ADC = \measuredangle BDC = 45^\circ$, $\measuredangle ADB = 60^\circ$ и $\measuredangle BCD = \measuredangle ACD = 90^\circ$, то докажете, че AC е перпендикулярна на BC.

6. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, за който точка K е средата на CC_1, а точка O е центърът на долната основа. Намерете $\cos \measuredangle(D_1O; BK)$.

7. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, точка K, която лежи на AA_1, като $AK : KA_1 = 1 : 4$ и точка M от AA_1 такава, че $AM : MA_1 = 4 : 1$. Намерете $\cos \measuredangle(BK; D_1M)$.

8. Даден е правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с измерения $AB = 3$, $BC = 4$ и $AA_1 = 5$. Точка M е средата на ръба BC. Намерете косинуса на ъгъла между правите A_1B и C_1M.

9. Даден е правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с измерения $AB = 6$, $BC = 4$ и $AA_1 = 5$. Точка M е средата на ръба BC, а точка K е средата на C_1D_1. Намерете косинуса на ъгъла между правите DK и C_1M.

24 УСПОРЕДНОСТ В ПРОСТРАНСТВОТО. УСПОРЕДНОСТ МЕЖДУ ПРАВА И РАВНИНА

Да си припомним свойствата на успоредност между права и равнина. В сила са следните теореми:

Теорема 1

Ако права и равнина са успоредни, то всяка равнина, която съдържа правата и пресича дадената равнина, я пресича в права, успоредна на дадената права.